SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

Nives Baranović, predavač

OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

Recenzenti:
dr. sc. Sanja Rukavina, izv. prof., Sveučilište u Rijeci, Odjel za matematiku
dr. sc. Damir Vukičević, red. prof., Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet

***WEB predavanje** recenzirano dana 16. studenog 2015. i prema Odluci Znanstveno-nastavnog vijeća Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Splitu, donesenoj na sjednici 2. prosinca 2015. postavljeno na www.ffst.hr (službenoj WEB stranici Filozofskog fakulteta u Splitu)*

ZNANSTVENO PODRUČJE:	Prirodne znanosti
ZNANSTVENO POLJE:	Matematika
STUDIJSKI PROGRAM:	Učiteljski studij
GODINA I SEMESTAR:	3. godina, 5. semestar
GODIŠNJI FOND SATI:	60 sati
TJEDNI BROJ SATI:	2 sata predavanja + 2 sata seminara

METODIČKI ASPEKTI PREDAVANJA

NASTAVNI PREDMET:	Matematika 1
NASTAVNA TEMA:	Osnove matematičke logike
METODE RADA:	Frontalni rad, rad u paru, individualni rad
NASTAVNA SREDSTVA:	Power Point prezentacija
I TEHNIČKA POMAGALA:	Računalo i LCD projektor, ploča i krede u boji
CILJEVI NASTAVE:	Upoznati studente sa osnovnom terminologijom i simbolikom matematičke logike, koja se koristi u većini matematičkih područja. Osposobiti studente za povezivanje govornog jezika i simboličkog zapisa elemenata matematičke logike, logičko povezivanje i zaključivanje te primjenu logičkih operacija u konkretnim

zadacima. Razvijati pozitivan odnos studenata prema učenju matematike, odgovornosti za svoj uspjeh i napredak te svijest o svojim matematičkim sposobnostima.

ZADACI NASTAVE: Upoznavanje i usvajanje pojmova i njihovih svojstava iz matematičke logike (sud, vrijednost istinitosti, logičke opercije, predikati, kvantifikatori, tautologija, kontradikcija) te vještine operiranja sa sudovima. Razvijanje vještina argumentiranog komuniciranja matematičkim znanjima o sudovima.

KORELACIJA: Elementi matematičke logike koriste se u većini područja klasične i moderne matematike, ali i u svakodnevnom životu i profesionalnom radu svakog pojedinca.

LITERATURA (za studente):

Osnovna:

1. Pavković, B., Veljan, D. (2004). *Elementarna matematika I.* Zagreb: Školska knjiga.
2. Baranović, N. (2014.) *Matematika I* (materijal dostupan na moodlu Filozofskog fakulteta: https://paideia.ffst.hr/learning/login/index.php

Dopunska:

1. Pelle, B. (2004). *Tako poučavamo matematiku*. Zagreb: Školske novine i HMD.

LITERATURA (za nastavnika):

1. Devidé, V. (1975). *Stara i nova matematika*. Školska knjiga: Zagreb
2. Borzan, Božičević, Devidé, Duković, Krnić, Kronfeld, Mardešić, Matulić-Bedenić, Pavlić, Pavlović, Stošić. (1971). *Razgovori o matematici*. Školska knjiga: Zagreb
3. Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Element: Zagreb
4. Kalužin, L. A. (1971). *Što je matematička logika*. Školska knjiga: Zagreb
5. Mendelson, E. (1997). *Introduction in Mathematical logic*. Chapman & Hall: New York, dostupno na: http://www.jhtm.nl/tudelft/tw3520/Introduction_to_Mathematical_Logic.pdf
6. Pavković, B., Veljan, D. (2004). *Elementarna matematika I.* Zagreb: Školska knjiga.
7. Rautenberg, W. (2009). *A Concise Introduction to Mathematical logic.* Dostupno na: http://www.dainf.cefetpr.br/~kaestner/Logica/MaterialAdicional/announceRautemberg.pdf
8. Tourlakis, G. (2003). *Lectures In Logic And Set Theory. Volume I: Mathematical logic*. Cambridge University Press
9. Vuković, M. (2007). *Matematička logika 1*. Skripta. PMF – Matematički odjel: Zagreb
10. Zsigmond, H., Mihály, S. (1976). *Pristup modernoj algebri*. Školska knjiga: Zagreb

Osnove matematičke logike

U svakodnevnom životu i radu, na temelju razmišljanja, prosuđivanja i zaključivanja iskazujemo određene ideje i tvrdnje. Zakonitosti i pravilnosti koje spoznajemo formiramo u jednostavne ili složene rečenice te se one u tom obliku dalje koriste ili istražuju. Znanstvena disciplina koja se bavi proučavanjem vještina mišljenja, raspravljanja, načinima spoznavanja te vrstama pravilnog zaključivanja naziva se **logika**. Grčki **logos** (λόγοσ) znači *riječ, govor, tvrdnja, dokaz, zaključak, razmišljanje.*

Matematička logika je znanstvena disciplina koja se bavi proučavanjem načina spoznavanja i pravila zaključivanja vezanih za matematičke pojmove, izjave i operacija s izjavama te matematičkim dokazima. Matematička logika je jako važan i vrlo razvijeni dio matematike koji ima široku primjenu kako u drugim granama matematike, tako i u drugim znanostima. Ovdje se obrađuje samo mali dio koji se odnosi na klasičnu logiku sudova: na pojmove, simbole te operacije s izjavama.

Sud. Vrijednost istinitosti.

Svaki čovjek misli može izražavati na različite načine, bilo verbalno, bilo neverbalno. Ipak, najčešće se služi rečenicama. Za rečenice kojima se nešto tvrdi kažemo da su deklarativne. Nekim deklarativnim rečenicama izriču se istinite tvrdnje, a nekima lažne tvrdnje. Za neke deklarativne rečenice se može utvrditi istinitost, a za neke ne. Deklarativne rečenice mogu biti smislene, ali i dvosmislene itd. Kada uzmemo u obzir samo smislene deklarativne rečenice za koje se može utvrditi istinitost onda kažemo da smo tom rečenicom izrekli sud.

Sud (izjava, iskaz) je osnovni pojam matematičke logike koji se ne definira. Ipak, da bi stvorili predodžbu, valjanu misao, o tom pojmu, u intuitivnom smislu prema prethodno opisanom, kažemo da je sud svaka smislena izjavna rečenica za koju se može utvrditi je li istinita ili lažna. Ako je izjavna rečenica istinita onda za nju kažemo da je **istinit sud**, a ako je rečenica lažna, onda kažemo da je **lažni sud**. Za rečenicu koja nije izjavna ili se ne može utvrditi je li istinita ili lažna kažemo da **nije sud**.

Primjer 1. Ispitati koje su od sljedećih rečenica sudovi i kakav sud. Objasniti zaključak.

1. *Jedan plus jedan jednako je 2.*
2. *Broj četiri je veći od broja sedam.*
3. $x-3=4$.
4. *Koji je danas dan?*
5. *Dobar dan! (Doviđenja!)*
6. *Ja sada govorim laž.*
7. $P=x^2$

Obrazloženje:

1. Prva rečenica predstavlja tvrdnju koja je istinita pa ona predstavlja istiniti sud.
2. Druga rečenica predstavlja tvrdnju koja nije istinita pa ona predstavlja lažni sud.
3. Ovim simboličkim zapisom dana je jednakost u kojoj je jedan član nepoznat pa se ne može ustanoviti je li ta jednakost istinita ili lažna. Stoga ova tvrdnja nije sud. Ako bi se umjesto nepoznate vrijednosti uzela određena vrijednost, onda bi jednakost bila sud. Npr. za $x=7$ jednakost $7-3=4$ je istiniti sud, a za $x=5$ jednakost $5-3=4$ je lažni sud.
4. Četvrta rečenica nije izjavna (deklarativna) već upitna pa nije sud.

5. Ove rečenice nisu izjavne već uskličnе pa nisu ni sud.
6. Ovom rečenicom tvrdim da lažem. To znači da nije istina kada kažem da lažem, tj. tada govorim istinu. No, to je u suprotnosti s izjavom da govorim laž. Stoga ovo nije sud jer se ne može odrediti njegova istinitost.
7. Ova formula nije sud jer ne znamo što je P, a što x te se ne može utvrditi njezina istinitost. Ako kažemo*: Veličina površine kvadrata* P*, čija je stranica duljine* x*, računa se po formuli* $P = x^2$ onda je ta rečenica istiniti sud. ♦

U radu sa sudovima ne zanima nas sadržaj suda već vrijednost istinitosti tog suda. Sudove ćemo u nastavku označavati malim pisanim slovima: ***x, y, p, q, …*** Vrijednost istinitosti suda (semantička vrijednost) može biti ili **istina** ili **laž, nikako oboje** (*Tertium non datur* – princip isključenja trećeg). Kada je vrijednost *istina* koristi se oznaka **T (ili 1)** što čitamo „TE“, a kada je vrijednost *laž* koristi se oznaka $\perp$ (ili 0) što čitamo „NE TE“. Ako je neki sud ***p*** istinit pišemo: $\tau(p) = T$ ili $\tau(p) = 1$. Ako neki sud ***q*** nije istinit pišemo $\tau(q) = \perp$ ili $\tau(q) = 0$. Simbol τ je grčko slovo „TAU“.

Primjer 2. Dane su sljedeće rečenice: *Broj -2 je veći od broja 7*; *Kub broja 2 je broj 8; Broj 13 je veći od broja 7 i manji od broja 5; Broj jedan je mali broj*. Odredite vrijednost istinitosti danih rečenica i zapišite to simbolički.

Obrazloženje:
Prva rečenica predstavlja lažni sud (p) pa se može pisati $\tau(p) = \perp$. Budući se cijela rečenica može simbolički zapisati kao: $-2 > 7$, za vrijednost istinitosti suda možemo zapisati $\tau(-2 > 7) = \perp$.

Duga rečenica predstavlja istiniti sud (q) pa možemo pisati: $\tau(q) = \mathrm{T}$ ili $\tau(2^3 = 8) = \mathrm{T}$.

Treća rečenica predstavlja lažni sud (s). Simbolički se rečenica može zapisati u obliku proširene nejednakosti $7 < 13 < 5$ pa za vrijednost istinitosti suda pišemo: $\tau(s) = \perp$ ili $\tau(7 < 13 < 5) = \perp$.

Zadnja rečenica nema smisla pa ne predstavlja sud. Ako bi umjesto toga rekli npr. *Broj jedan je najmanji prirodan broj,* onda bi to bio isitniti sud i pisali bi $\tau(r) = \mathrm{T}$.♦

Sud može biti **elementaran** i **složen**. Za sudove p i q iz prethodnog primjera kažemo da su elementarni. Kada elementarne sudove povežemo logičkim operacijama dobivamo složeni sud. Sud s iz prethodnog primjera je složeni sud.

Operacije sa sudovima

Povezivanjem jednostavnih rečenica koje predstavljaju elementarne sudove veznicima *ne, i, ili, ako…onda, ako i samo ako* (*onda i samo onda*) gradimo složene rečenice, odnosno složene sudove. Za tako dobivene rečenice se također može utvrditi jesu li istinite ili lažne, što ovisi o vrijednosti istinitosti rečenica od kojih su izgrađene. **Veznici** pomoću kojih elementarne sudove povezujemo u složene su **logičke operacije** sa sudovima.

Najjednostavnija logička operacija je operacija negacije i ona je **unarna operacija** jer se operacija negacije vrši nad jednim sudom. Osnovne logičke operacije koje se vrše između dvaju sudova su konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija te se nazivaju **binarnim operacijama**.

Za ispitivanje vrijednosti istinitosti složenih sudova, radi jednostavnosti i preglednosti koriste se tablice, za koje se kraće kaže da su **tablice istinitosti** (ili **semantičke tablice**). Na primjer, tablica istinitosti za dva suda je tablica 1.

p	q	Operacija
⊤	⊤	
⊤	⊥	
⊥	⊤	
⊥	⊥	

Tablica 1. Tablica istinitosti

Iz tablice 1 se vidi da tablica istinitosti za dva suda ima 4 retka ($2^2 = 4$ različitih mogućnosti), za tri suda će imati 8 redaka ($2^3 = 8$ različitih mogućnosti), itd. Općenito, tablica istinitosti za n različitih sudova će imat 2^n redaka (različitih mogućnosti).

Za dva (složena) suda kažemo da su **semantički jednaki** (ili kraće, **jednaki**) ako su im pripadne semantičke tablice jednake. Oznaka za semantičku jednakost sudova je **≡**, što ćemo čitati "jednako je".

Negacija

Negacija suda p je iskaz koji negira ono što se tvrdi sudom p. Oznaka za negaciju suda p je $\neg p$ što čitamo „non *p*" ili „nije *p*".

Negacija u običnom govoru odgovara riječi „ne". Ako je p istiniti sud, tada je negacija $\neg p$ lažan sud. Ako je p lažan sud, tada je negacija $\neg p$ istinit sud. Dvostruka negacija suda p je sud p: $\neg(\neg p) \equiv p$. Tablica istinitosti negacije suda p je dana (dva načina) u tablici 2.

p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤

p	$\neg p$
1	0
0	1

Tablica 2. Tablica istinitosti negacije suda

Primjer 3: Postavite negaciju i dvostruku negaciju suda p: *Kvadrat je četverokut* te ispitajte istinitost dobivenih sudova.

Negacija suda p je sud $\neg p$: *Nije istina da je kvadrat četverokut*, odnosno *Kvadrat nije četverokut*. Budući je p istiniti sud, $\tau(p)=T$, negacija suda nije istinit sud, $\tau(\neg p)=\perp$. Dvostruka negacija suda p je sud $\neg(\neg p)$: *Nije istina da nije istina da je kvadrat četverokut*, odnosno *Nije istina da kvadrat nije četverokut*, a to znači da *Kvadrat jest četverokut.* Kako je negacija suda $\neg p$ lažan sud, $\tau(\neg p)=\perp$, to je negacija negacije suda istinit sud, $\tau\left(\neg(\neg p)\right)=T$ te pišemo: $\neg(\neg p)\equiv p$ ♦

Primjer 4: Postavite negaciju suda riječima i simbolički, p: *Broj 13 je veći od broja 7.*

Negacija suda p je sud $\neg p$: *Broj 13 nije veći od broja 7*. Ako jedan broj nije veći od drugog broja, onda može biti jednak drugom broju ili manji od drugog broja. To znači da se negacija suda p može postaviti na sljedeći način**:** *Broj 13 je manji ili jednak broju 7*. Simbolički: $\neg(13>7)\equiv 13\leq 7$.♦

Konjunkcija

Konjunkcija dvaju sudova p **i** q je sud koji je istinit ako i samo ako su oba suda p i q istinita. Oznaka za konjunkciju sudova p i q je $p\wedge q$ što čitamo „p **i** q“, a može i „p **et** q“ (lat. *et* znači *i*). Dakle, konjunkcija u običnom govoru odgovara vezniku „**i**“. Tablica istinitosti konjunkcije dvaju sudova $p\wedge q$ dana je u tablici 3, a crvenom bojom je istaknuto bitno svojstvo opisano definicijom.

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tablica 3. Tablica istinitosti konjunkcije sudova

Primjer 5. Od sudova p: *Broj 8 je djeljiv s 2* i q: *Broj 8 je djeljiv s 4* izgradite novi sud koristeći konjunkciju, a zatim ispitajte istinitost dobivenog suda.

Konjunkcija sudova p i q je sud $p\wedge q$: *Broj 8 je djeljiv s 2 i broj 8 je djeljiv s 4*, odnosno *Broj 8 je djeljiv s 2 i s 4.* S obzirom da su oba suda istinita, na temelju tablice 3 zaključujemo da je konjunkcija tih sudova istiniti sud. Simbolički: iz $\tau(p)=T, \tau(q)=T$ slijedi $\tau(p\wedge q)=T$.

Ako bi za jedan sud uzeli lažni sud, onda bi i konjunkcija tih sudova bio lažni sud. Npr. ako umjesto suda q uzmimo sud q': *Broj 8 je djeljiv s 3*, onda je konjunkcija tih sudova sud $p\wedge q'$: *Broj 8 je djeljiv s 2 i 3,* pa je prema tablici 3 to lažni sud. ♦

Disjunkcija

Disjunkcija (inkluzivna) dvaju sudova p **i** q je sud koji je istinit ako i samo ako je bar jedan od sudova p i q istinit. Oznaka za disjunkciju sudova p i q je $p \vee q$ što čitamo „ p **ili** q “, a može i „ p **vel** q “ (lat. *vel* znači *ili*). Dakle, disjunkcija u običnom govoru odgovara vezniku „ili”.

U ovoj definiciji, veznik *ili* ima slabiji (inkluzivni) smisao jer se dopušta da istodobno vrijede oba suda: ili p ili q ili oba. Stoga se ova operacija još naziva inkluzivna disjunkcija. Pored nje postoji ekskluzivna disjunkcija koja dopušta istinitost samo jednog od sudova, ali ne i oba.

Ekskluzivna disjunkcija dvaju sudova p **i** q je sud koji je istinit ako i samo ako je samo jedan od sudova p i q istinit. Oznaka je $p \veebar q$ što čitamo „ p **ekskluzivno ili** q “.

U našem svakodnevnom govoru veznik „ili“ ponekad ima inkluzivni smisao, a ponekad ekskluzivni. Na primjer ako kažemo: *Popodne ću spavati ili čitati knjigu* smisao veznika *ili* je inkluzivni jer to popodne možemo spavati ili čitati knjigu ili oboje (malo spavati, malo čitati). Ali, ako kažemo *Ja sam rođena u četvrtak ili petak* smisao veznika *ili* je ekskluzivni jer sam rođena ili u četvrtak ili u petak, no oboje ne može biti. Tablica istinitosti inkluzivne i ekskluzivne disjunkcije dvaju sudova p i q dana je u tablici 4, a crvenom bojom je istaknuto bitno svojstvo opisano definicijom.

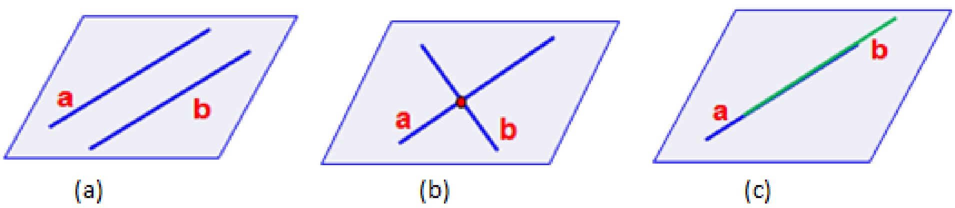
p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Tablica 4. Tablica istinitosti disjunkcije sudova

Primjer 6. Uzmimo dva pravca a i b jedne ravnine te promatrajmo sljedeća dva suda: p - *Pravci* a i b *su paralelni* i q - *Pravci* a i b *se sijeku*.

Ako isključimo mogućnost da se pravci a i b preklapaju (slika 1c), onda je samo jedan od danih sudova istinit sud, tj. ako je sud p istinit, onda je sud q lažan sud i obrnuto (slika 1a, slika 1b). U tom slučaju, sud prema ekskluzivnoj disjunkciji, $p \veebar q$: *Pravci* a i b *su paralelni ili se sijeku* je istinit sud jer jedno isključuje drugo, i sud prema inkluzivnoj disjunkciji, $p \vee q$: *Pravci* a i b *su paralelni ili se sijeku* je istiniti sud jer je dovoljno da barem jedan od sudova p i q bude istinit.



Slika 1: Dva pravca jedne ravnine

Ako dopustimo mogućnost da se pravci a i b preklapaju (sve točke su im zajedničke, poseban slučaj paralelnosti), onda oba suda mogu biti istinit sud (slika 1c). U tom slučaju je sud prema ekskluzivnoj disjunkciji, $p \veebar q$: *Pravci* a i b *su paralelni ili se sijeku* lažan sud, a sud prema inkluzivnoj disjunkciji, $p \vee q$: *Pravci* a i b *su paralelni ili se sijeku* je istiniti sud.♦

Napomena: U daljnjem radu, ako se koristi samo naziv *disjunkcija* onda se smatra da se radi o inkluzivnoj disjunkciji.

Kako se vrši negacija konjunkcije i disjunkcije iskazano je **De Morganovim formulama**:

(a) **Negacija konjunkcije** dvaju sudova jednaka je (semantički) disjunkciji negacija tih sudova. Simbolički:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q).$$

Primjer 7. Konjunkcija dvaju sudova $p \wedge q$ glasi: *Broj 8 je djeljiv s 2 i s 4.* Kako je ova rečenica skraćeni oblik rečenice: *Broj 8 je djeljiv s 2 i broj 8 je djeljiv s 4.*, iz tog suda čitamo da je sud p: *Broj 8 je djeljiv s 2* , a sud q je: *Broj 8 je djeljiv s 4.*

Negacija konjunkcije $\neg(p \wedge q)$ glasi: *Nije istina da je broj 8 djeljiv s 2 i da je broj 8 djeljiv s 4.* ili kraće: *Nije istina da je broj 8 djeljiv s 2 i 4.* To znači da broj 8 nije djeljiv s **barem** jednim od brojeva 2 i 4; odnosno, broj 8 nije djeljiv s 2 ili broj 8 nije djeljiv s 4 ili broj 8 nije djeljiv ni s 2 ni s 4. Kraće kažemo: *Broj 8 nije djeljiv s 2 ili nije djeljiv s 4.*

S druge strane, negacije pojedinačnih sudova su: $\neg p$: *Broj 8* ***nije*** *djeljiv s 2* , $\neg q$ je: *Broj 8* ***nije*** *djeljiv s 4* pa je disjunkcija tih sudova sud $(\neg p) \vee (\neg q)$**:** *Broj 8 nije djeljiv s 2* ***ili*** *nije djeljiv s 4.*

Dakle, dobili smo jednake sudove: $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$. S obzirom da je polazni sud $p \wedge q$ istinit, negacija ovog suda $\neg(p \wedge q)$ je lažan sud.♦

(b) **Negacija disjunkcije** sudova jednaka je (semantički) konjunkciji negacija tih sudova. Simbolički:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q).$$

Primjer 8. Uzmimo dva pravca a i b jedne ravnine te promatrajmo sljedeća dva suda: p - *Pravci* a *i* b *su paralelni* i q - *Pravci* a *i* b *se sijeku* (Slika 1). Disjunkcija ovih dvaju sudova $p \vee q$ glasi: *Pravci* a *i* b *su paralelni ili se sijeku* (vidjeti primjer 6).

Negacija disjunkcije $\neg(p \vee q)$ glasi: *Nije istina da su pravci* a i b *paralelni ili da se sijeku.* To znači: *Pravci* a i b *nisu paralelni i ne sijeku se.*

S druge strane, negacije pojedinačnih sudova su: $\neg p$: *Pravci* a i b *nisu paralelni,* $\neg q$ je: *Pravci* a *i* b *se ne sijeku* pa je konjunkcija tih sudova sud $(\neg p) \wedge (\neg q)$: *Pravci* a i b *nisu paralelni* **i** *pravci* a *i* b se *ne sijeku.* ili kraće: *Pravci* a i b *nisu paralelni i ne sijeku se.*

Dakle, dobili smo jednake sudove: $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$. S obzirom da je polazni sud $p \vee q$ istinit sud (vidjeti primjer 6), negacija ovog suda $\neg(p \vee q)$ je lažan sud.♦

Implikacija

Implikacija dvaju sudova p **i** q je sud koji je lažan ako i samo ako je sud p istinit, a sud q lažan. (Iz istine ne može slijediti laž.) Oznaka za implikaciju sudova p i q je $p \Rightarrow q$ što čitamo: „iz p slijedi q“; „p povlači q“; „p implicira q“, odnosno „ako je p, onda je q“; „q je nužan uvjet za p“; „p je dovoljan uvjet za q“. Dakle, implikacija u običnom govoru odgovara veznicima „ako …, onda“. Tablica istinitosti implikacije dvaju sudova $p \Rightarrow q$ dana je u tablici 5, a crvenom bojom je istaknuto bitno svojstvo opisano definicijom.

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

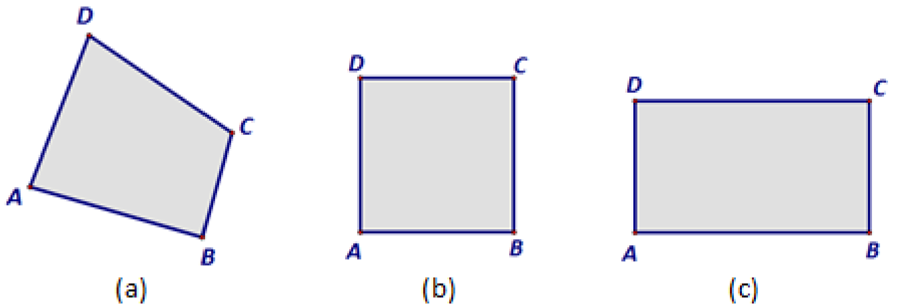
p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tablica 5. Tablica istinitosti implikacije sudova

Primjer 9. Od sudova p: *Četverokut ABCD je kvadrat* i q: *Četverokut ABCD je pravokutnik* izgradite novi sud koristeći implikaciju, a zatim ispitajte istinitost dobivenog suda, služeći se pri tome četverokutima ABCD sa slike 2.

Implikacija $p \Rightarrow q$ glasi: *Činjenica da je četverokut ABCD kvadrat* ***povlači*** *da je četverokut ABCD pravokutnik*, odnosno: *Ako je četverokut ABCD kvadrat onda je on pravokutnik.*

Ako uzmemo četverokut ABCD sa slike 2a, onda su p i q lažni sudovi, a implikacija $p \Rightarrow q$ je istiniti sud. Ako uzmemo četverokut ABCD sa slike 2b, onda su p i q istiniti sudovi (svaki kvadrat je pravokutnik) i implikacija $p \Rightarrow q$ je istiniti sud. Ako uzmemo četverokut ABCD sa slike 2c, onda je sud p lažan sud, a sud q je istiniti sud, pa je implikacija $p \Rightarrow q$ istiniti sud.



Slika 2: Četverokut ABCD

Implikacija $q \Rightarrow p$ glasi: *Ako je četverokut ABCD pravokutnik onda je on kvadrat*.

Ako je ABCD četverokut sa slike 2. lijevo, onda su q i p lažni sudovi, a implikacija $q \Rightarrow p$ je istiniti sud. Ako je ABCD četverokut sa slike 2. u sredini, onda su p i q istiniti sudovi i implikacija $q \Rightarrow p$ je istiniti sud. Ako je četverokut ABCD sa slike 2. desno, onda je sud q istiniti sud, a sud p lažan sud, pa je implikacija $q \Rightarrow p$ lažan sud (iz istine ne može slijediti laž).

Na temelju promatranih implikacija i njihove istinosne vrijednosti može se uočiti da za četverokut sa slike 2, lijevo vrijedi: implikacija $p \Rightarrow q$ je istiniti sud i implikacija $q \Rightarrow p$ je isitinit sud, dok za četverokut sa slike 2, desno vrijedi: implikacija $p \Rightarrow q$ je istiniti sud, a implikacija $q \Rightarrow p$ nije isitinit sud. Dakle, ako je implikacija $p \Rightarrow q$ istiniti sud, onda implikacija $q \Rightarrow p$ može (ali ne mora) biti istinita. U prvom slučaju kažemo da implikacija vrijedi u oba smijera. ♦

Napomena: Kada se pomoću logičke operacije implikacije od sudova p i q gradi složeni sud $p \Rightarrow q$ ili $q \Rightarrow p$, između sudova p i q se uspostavlja veza, ali ta veza ne izražava vezu između sadržaja sudova p i q već se veza razmatra samo sa stajališta njihove vrijednosti istinitosti. S druge strane, kada se u svakodnevnom govoru koristi "ako je …, onda je", najčešće se podrazumijeva određena uzročno posljedična veza pa treba paziti da se čitanje implikacije $p \Rightarrow q$ sa "ako je p, onda je q" ne tumači u smislu uzročno posljedične veze, već samo s aspekta istinosne vrijednosti u odnosu na istinitosne vrijednosti pojedinačnih sudova od kojih je izgrađen.

Primjer 10. Promotrimo sljedeće sudove: p - *Tri puta tri je devet*, q - *Dva plus dva je pet*, r - *Euklid je grčki matematičar*, s - *Platon je hrvatski filozof* te ispitajmo istinitost implikacija: $p \Rightarrow r$, $p \Rightarrow s$, $q \Rightarrow r$ i $q \Rightarrow s$.

Sudovi p i r su istiniti sudovi, a sudovi q i s lažni sudovi.

Implikacija $p \Rightarrow r$ glasi: *Ako je tri puta tri devet, onda je Euklid grčki matematičar* i to je istinit sud. Implikacija $p \Rightarrow s$ glasi: *Ako je tri puta tri devet, onda je Platon hrvatski filozof* i to je lažni sud (iz istine ne može slijediti laž).

Implikacija $q \Rightarrow r$ glasi: *Ako je dva plus dva pet, onda je Euklid grčki matematičar* i to je istinit sud. Implikacija $q \Rightarrow s$ glasi: *Ako je dva plus dva pet, onda je Platon hrvatski filozof* i to je istinit sud.

Na temelju ovog primjera vidimo da iskazani sudovi ne odgovaraju upotrebi veznika "ako …, onda" na koju smo navikli u svakodnevnom govoru jer zasigurno Euklid nije postao grčki matematičar zbog toga što dva plus dva nije pet. ♦

Negacija implikacije $p \Rightarrow q$ je sud $\neg(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q})$ koji je istinit kada je implikacija lažan sud i obrnuto. Može se pokazati da su implikacija $p \Rightarrow q$ i disjunkcija $(\neg p) \vee q$ semantički jednaki sudovi. Stoga se negacija implikacije $\neg(p \Rightarrow q)$ može odrediti kao negacija promatrane disjunkcije $\neg((\neg p) \vee q)$, što primjenom de Morganove formule prelazi u konjunkciju $p \wedge (\neg q)$. Dakle, negacija implikacije može se vršiti po formuli: $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

Primjer 11. Promotrimo implikaciju $p \Rightarrow q$ zadanu na sljedeći način: *Ako je prirodan broj* n *djeljiv s 10, onda je taj broj djeljiv i s 5.*

S obzirom da u ovoj rečenici ne znamo o kojem prirodnom broju n je riječ, ne možemo ustanoviti istinosnu vrijednost implikacije pa ne možemo govoriti o sudu. Međutim, ako uzmemo konkretan prirodan broj, npr. $n = 70$, onda su p - *Prirodan broj 70 je djeljiv s 10* i q - *Prirodan broj 70 je djeljiv s 5* istiniti sudovi pa je istinita i implikacija $p \Rightarrow q$, tj. *Ako je prirodan broj 70 djeljiv s 10 onda je taj broj 70 djeljiv s 5* je istiniti sud.

Izvršimo negaciju implikacije po formuli: $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$. Negacija suda q glasi: *Prirodan broj 70 nije djeljiv s 5* i to je lažni sud. Kako je p - *Prirodan broj 70 je djeljiv s 10* istiniti sud, konjunkcija $p \wedge (\neg q)$ - *Prirodan broj 70 je djeljiv s 10 i taj broj nije djeljiv s 5* je lažni sud. ♦

Ekvivalencija

Ekvivalencija dvaju sudova p i q je sud koji je istinit samo ako su oba suda p i q istinita ili ako su oba suda p i q lažna. Oznaka za implikaciju sudova p i q je $p \Leftrightarrow q$ što čitamo: „p **ekvivalentno** q", odnosno „p je **ako i samo ako** je q", odnosno „p je **onda i samo onda** kada je q". Dakle, ekvivalencija u običnom govoru odgovara veznicima „ako i samo ako" te „onda i samo onda". Tablica istinitosti implikacije dvaju sudova $p \Leftrightarrow q$ dana je u tablici 6, a crvenom bojom je istaknuto bitno svojstvo opisano definicijom.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tablica 6. Tablica istinitosti ekvivalencije sudova

Primjer 12: Od sudova p - *Prirodan broj 48 je djeljivi s 6* i q - *Prirodan broj 48 je djeljivi s 2 i s 3* izgradite novi sud koristeći ekvivalenciju, a zatim ispitajte istinitost dobivenog suda.

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ je sud: *Prirodan broj 48 je djeljivi s 6 ako i samo ako je taj broj djeljivi s 2 i 3*. S obzirom da su p i q istiniti sudovi i složeni sud $p \Leftrightarrow q$ izgrađen ekvivalencijom je istiniti sud.

Ako bi umjesto suda q uzeli sud r - *Prirodan broj 48 je djeljivi s 3 i s 5*, koji je lažan sud onda bi i ekvivalencija $p \Leftrightarrow r$, koja glasi: *Prirodan broj 48 je djeljivi s 6 ako i samo ako je taj broj djeljivi s 3 i s 5,* bila lažan sud.♦

Ekvivalencija dvaju sudova se može izgraditi i kao konjunkcija dviju implikacija. Simbolički:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Drugim riječima, ekvivalencija je istiniti sud samo onda kada su obje implikacije istiniti sudovi (jer je konjunkcija dvaju sudova istiniti sud samo onda kada su oba suda istinita).

Primjer 13. Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ iz primjera 12 je istiniti sud: *Prirodan broj 48 je djeljivi s 6 ako i samo ako je taj broj djeljivi s 2 i 3.*

Koristeći ovu ekvivalenciju možemo postaviti sljedeće implikacije: *Ako je prirodan broj 48 djeljiv s 6 onda je taj broj djeljiv s 2 i 3* ($p \Rightarrow q$) i *Ako je prirodni broj 48 djeljiv s 2 i 3 onda je taj broj djeljiv s 6* ($q \Rightarrow p$). Obje implikacije su istiniti sudovi pa je i njihova konjunkcija istiniti sud.

Promotrimo implikacije u primjeru 9, koristeći sliku 2c. Implikacija $p \Rightarrow q$ glasi: *Ako je četverokut ABCD kvadrat onda je on pravokutnik*. Ova implikacija je istiniti sud jer je p lažni sud, a q istiniti sud. Implikacija $q \Rightarrow p$ glasi: *Ako je četverokut ABCD pravokutnik onda je on kvadrat*. Ova implikacija je lažni sud jer je q istiniti sud, p lažni sud (a iz istine ne može slijediti laž). Stoga je i konjunkcija ovih implikacija $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ lažni sud, kao i ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$, koja glasi: *Četverokut ABCD je kvadrat ako i samo ako je taj četverokut pravokutnik.* ♦

Negirati ekvivalenciju značilo bi negirati konjunkciju dviju implikacija, što se izvodi po De Morganovoj formuli za konjunkciju i pravilu negacije implikacije. Odabir primjera prepuštamo čitatelju.

Predikati. Kvantifikatori

Već smo vidjeli (Primjer 1, str. 3) da rečenica npr. *Broj x je paran broj* nije sud jer sadrži nepoznati broj pa se ne može ustanoviti njezina istinitost. No, kada se umjesto x uzme konkretan broj onda rečenica postaje sud (istinit ili lažan). Npr. *Broj* 8 *je paran broj* je istiniti sud, a *Broj* 7 *je paran broj* je lažni sud.

Izjavna rečenica koja sadrži jednu ili više nepoznanica i koja postaje sudom kada nepoznanica poprimi određenu vrijednost naziva se **predikat**. Ako je u rečenici jedna nepoznanica x onda govorimo o predikatu $p(x)$, ako su dvije nepoznanice x i y, onda govorimo o predikatu $p(x, y)$, itd. Npr. rečenica iz primjera 9: *Ako je prirodan broj n djeljiv s 10, onda je taj broj djeljiv i s 5.* je predikat $p(n)$.

Kada ispitujemo za koje vrijednosti nepoznanice (iz promatranog skupa) predikat $p(x)$ postaje istiniti sud uočavamo da su neki predikati istiniti (ili lažni) za bilo koju vrijednost nepoznanice x, neki su istiniti (lažni) samo za neke vrijednosti nepoznanice x, a neki su istiniti (lažni) samo za jednu vrijednost nepoznanice x. Za koliko x-eva predikat $p(x)$ postaje istiniti sud iskazujemo simboličkim oznakama koje nazivamo kvantifikatorima (količitelji; lat. *quantum* - koliko).

Kvantifikator je logički operator koji iskazuje koliko matematičkih objekata (nepoznanica) posjeduje određeno svojstvo (predikat čini istinitim). Imamo dvije vrste kvantifikatora: univerzalni ($\forall$) i egzistencijalni ($\exists$). Ukoliko neka tvrdnja vrijedi (odnodno ne vrijedi) u svim slučajevima, bez obzira koji broj ili objekt uzeli, odnosno predikat $p(x)$ je istiniti (lažan) sud bez obzira na vrijednost nepoznanice x, koristimo **univerzalni kvantifikator** $\forall x$ te čitamo „**za svaki** x“.

Primjer 14. Rečenica: *Kvadrat svakog realnog broja x je nenegativan (veći ili jednak nuli)* je predikat $p(x)$ koji postaje istiniti sud za bilo koju vrijednost realnog broja x. Npr. $(-2.5)^2 = 6.25$, $0^2 = 0$, $16^2 = 256$ itd., a brojevi $6.25, 0, 256$ su nenegativni. Simbolički ovaj predikat možemo zapisati: $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$. ♦

Napomena: U daljnjem radu, ako za broj nije istaknuto kojem skupu brojeva pripada, onda će se pod *brojem* podrazumijevati *realni broj*. Npr. Ako predikat iz prethodnog primjera zapišemo: $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ onda smatramo da je x realan broj.

Ukoliko neka tvrdnja vrijedi samo u određenim slučajevima, odnosno predikat $p(x)$ je istiniti sud samo za neke vrijednosti nepoznanice x, koristimo **egzistencijalne kvantifikatore**. Ako tvrdnja vrijedi samo za neke brojeve ili objekte koristimo kvantifikator $\exists x$ što čitamo „**postoji (barem jedan)** x“. Ako tvrdnja vrijedi točno za jedan broj ili objekt koristimo kvantifikator $\exists! x$ te čitamo „**postoji točno jedan** x“. Kvantifikatori se mogu međusobno kombinirati.

Primjer 15. Predikate iskazane sljedećim rečenicama zapišite simbolički te ispitajte njihovu istinitost.

(a) Postoji broj koji je veći od 50.
(b) Od svakog broja postoji veći broj.
(c) Za prirodne brojeve vrijedi komutativnost zbrajanja.
(d) Nije svaki količnik realnih brojeva realan broj.
(e) Samo jedan broj pomnožen s 3 daje broj 6.
(f) Umnožak dvaju brojeva je nula ako i samo ako je barem jedan od njih nula.

Istinosna vrijednost i simbolički zapis:

(a) T $(\exists x)(x > 50)$
(b) T $(\forall x)(\exists y)(y > x)$
(c) T $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a + b = b + a)$
(d) $\perp$ $(\exists a, b \in \mathbb{R})(a : b \notin \mathbb{R})$
(e) T $(\exists! x)(x \cdot 3 = 6)$
(f) T $(\forall x, y)\ x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \lor y = 0)$. ♦

Primje 16. Sljedeće predikate iskažite riječima. Ispitajte njihovu istinitost.

(a) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 \leq 0)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 1 = 0)$

(c) $(\forall x \in \mathbb{N})(x^2 = 9)$

(d) $(\exists x \in \mathbb{N})(x^2 = 9)$

(e) $(\exists! x \in \mathbb{N})(x^2 = 9)$

(f) $(\exists! x \in \mathbb{R})(x^2 = 9)$

(g) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

(h) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y > 0) \Rightarrow [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$

Predikat iskazan riječima i istinosna vrijednost:

(a) Postoji realan broj x čiji je kvadrat manji ili jednak nuli. T
(b) Postoji realan broj x kojemu je kvadrat jednak -1. $\perp$
(c) Kvadrat svakog prirodnog broja je devet. $\perp$
(d) Postoji prirodan broj čiji je kvadrat jednak devet. T
(e) Kvadrat samo jednog prirodnog broja je devet. T
(f) Kvadrat samo jednog realnog broja je devet. $\perp$
(g) Ako su kvadrati dvaju cijelih brojeva jednaki, onda su i ti brojevi jednaki. $\perp$
(h) Ako je umnožak dvaju realnih brojeva pozitivan broj, onda su oba broja pozitivna ili su oba negativna. T ♦

Negacija predikata

Pri negaciji predikata u kojem se koriste kvantifikatori, univerzalni kvantifikator prelazi u egzistencijalni, a egzistencijalni u univerzalni. Simbolički:

$$\neg\big((\forall x)\ p(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x) \neg p(x).$$

Primjer 16. Negirajte predikate zadane riječima: (a) *Svi studenti učiteljskog odsjeka vole matematiku*; (b) *Neki studenti učiteljskog odsjeka znaju konstruirati pravilni peterokut.*

(a) Negacija glasi: *Postoji (barem jedan) student učiteljskog odjeka koji ne voli matematiku.*
(b) Negacija glasi: *Nije istina da neki studenti učiteljskog odsjeka znaju konstruirati pravilni peterokut.* ili bi u duhu našeg jezika rekli: *Niti jedan student učiteljskog odsjeka ne zna konstruirati pravilni peterokut*. (u nadi da se ipak radi o lažnom sudu ☺)♦

Tautologija i kontradikcija

Kada izgradimo neki složeni sud vidjeli smo da vrijednost istinitosti tog suda ovisi o istinitosti pojedinačnih sudova od kojih je izgrađen. Međutim, postoje složeni sudovi koji su uvijek istiniti bez obzira na vrijednosti istinitosti pojedinačnih sudova. Takve sudove nazivamo **tautologijama**. Je li određeni složeni sud tautologija može se ispitati korištenjem tablice istinitosti.

Primjer 17: Koristeći tablicu istinitosti ispitajte je li složeni sud $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, koji je izgrađen od sudova p i q, tautologija.

U prva se dva stupca pišu osnovni sudovi p i q te njihove vrijednosti istinitosti. Zatim se u sljedeće stupce redom dodaju složeni sudovi od kojih je izgrađen sud čija istinitost se ispituje. U ovom primjeru najprije je izgrađena disjunkcija polaznih sudova p i q, tj. $p \vee q$, zatim konjunkcija polaznog suda p i disjunkcije $p \vee q$, tj. $p \wedge (p \vee q)$. Na kraju je dana ekvivalencija konjunkcije $p \wedge (p \vee q)$ i polaznog suda p, tj. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$. Tablica istinitosti za dani složeni sud se gradi na temelju osnovnih tablica istinitosti (definicija) određenih logičkih operacija (Tablica 7).

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Tablica 7. Tablica istinitosti ekvivalencije sudova

Iz zadnjeg stupca tablice 7 vidljivo je da je zadani složeni sud istinit (sve 1) bez obzira na vrijednosti istinitosti pojedinačnih sudova p i q, od kojih je izgrađen. To znači da je ovaj složeni sud tautologija.♦

Sada možemo ispitati istinitost formule za **negaciju implikacije**, tj. pomoću tablice istinitosti ispitajmo je li složeni sud $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$ tautologija.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Tablica 8. Tautologija

Dakle, složeni sud $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$ je tautologija (tablica 8). Drugim riječima, negacija implikacije sudova $\neg(p \Rightarrow q)$ po vrijednosti istinitosti je jednaka konjunkciji $p \wedge (\neg q)$. Zbog toga se često pri korištenju formule, između ta dva suda piše znak jednakosti (usporediti s temom *Implikacija*, str. 11.).

Osim sluzenih sudova koji su tautologije, postoje složeni sudovi koji su uvijek lažni bez obzira na vrijednosti istinitosti pojedinačnih sudova. Takve sudove nazivamo **kontradikcijama**.

Primjer 18: Koristeći tablicu istinitosti pokazati da je složeni sud $(p \vee q) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$, izgrađen od sudova p i q, kontradikcija.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(p \vee q) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0

Tablica 9. Kontradikcija

Iz zadnjeg stupca tablice 9 vidljivo je da je zadani složeni sud lažan (sve 0) bez obzira na vrijednosti istinitosti pojedinačnih sudova p i q, od kojih je izgrađen. To znači da je ovaj složeni sud kontradikcija.♦

Pitanja i zadaci za ponavljanje i vježbu:

1. Objasnite pojam *sud*.
2. Kada za operaciju kažemo da je unarna, a kada binarna? Navesti primjer.
3. Definicija negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije.
4. Dati po jedan primjer za sud dobiven binarnim operacijama te izvršiti negaciju tog suda.
5. Objasniti de Morganove formule. Dati primjer.
6. Objasniti tablicu istinitosti.
7. Što su kvantifikatori, a što predikati?
8. Kada za sud kažemo da je tautologija/kontradikcija?

9. Sljedeće rečenice zapišite simbolički te ispitajte njihovu istinitost.
   (a) Ako su realni brojevi jednaki tada su jednaki i njihovi kubovi.
   (b) Nužan uvjet da cijeli broj bude djeljiv s 4 je da bude djeljiv s 2.
   (c) Umnožak dvaju prirodnih brojeva x i y jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od njih jednak nuli.
   (d) Prirodan broj je djeljiv s dvanaest ako je djeljiv s tri i četiri, i obrnuto.
   (e) Da bi suma dvaju realnih brojeva bila nula dovoljno je da oba broja budu nula.
   (f) Ako su racionalni brojevi suprotnog predznaka tada je njihov umnožak negativan broj.

10. Predikate zapisane simbolički iskažite riječima te ispitajte njihovu istinitost:
   (a) $(\forall a, b \in \mathbb{N})\ a \cdot b \in \mathbb{N}$
   (b) $(\forall a \in \mathbb{Z})\quad a + 0 = 0 + a = a$
   (c) $(\forall a \in \mathbb{R})\quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
   (d) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   (e) $(\forall a, b \in \mathbb{N})\ a - b \in \mathbb{N}$
   (f) $(\forall a, b \in \mathbb{R})\quad a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

11. Sljedećim izjavama napišite negaciju:
   (a) Svaki prosti broj veći od dva je neparan broj.
   (b) Postoji barem jedan prosti broj koji je djeljiv s 7.
   (c) Ne postoji prost broj djeljiv s 8.
   (d) Ako je broj djeljiv s 8 onda je djeljiv i s 4.
   (e) Dovoljan uvjet da broj bude djeljiv s 15 je da bude djeljiv s 3 i 5.

12. Pomoću tablice istinitosti **pokažite** da su sljedeći iskazi tautologije:
   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
   (b) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
   (c) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
   (d) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
   (e) $(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q)$
   (f) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
   (g) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   (h) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

13. **Ispitajte istinitost** sljedećih izjava:
   (a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
   (b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
   (c) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
   (d) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
   (e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
   (f) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
   (g) $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow q$