SVEUČILIŠTE U SPLITU

FILOZOFSKI FAKULTET

Nives Baranović, predavač

OSNOVNO O SKUPOVIMA

Recenzenti:
dr. sc. Sanja Rukavina, izv. prof., Sveučilište u Rijeci, Odjel za matematiku
dr. sc. Snježana Braić, doc., Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet

***WEB predavanje** recenzirano 7. srpnja 2015. i prema Odluci Znanstveno-nastavnog vijeća Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Splitu, donesenoj na sjednici 2. prosinca 2015. postavljeno na www.ffst.hr (službenoj WEB stranici Filozofskog fakulteta u Splitu.*

ZNANSTVENO PODRUČJE: Prirodne znanosti

ZNANSTVENO POLJE: Matematika

STUDIJSKI PROGRAM: Učiteljski studij

GODINA I SEMESTAR: 3. godina, 5. semestar

GODIŠNJI FOND SATI: 60 sati

TJEDNI BROJ SATI: 2 sata predavanja + 2 sata seminara

METODIČKI ASPEKTI PREDAVANJA

NASTAVNI PREDMET: Matematika 1

NASTAVNA TEMA: Osnovno o skupovima

METODE RADA: Frontalni rad, rad u paru, individualni rad

NASTAVNA SREDSTVA I TEHNIČKA POMAGALA: Power Point prezentacija; Računalo i LCD projektor, ploča i krede u boji

CILJEVI NASTAVE: Upoznati studente sa temeljnim pojmovima iz teorije skupova i njihovim svojstvima. Osposobiti studente za povezivanje govornog jezika, simboličkog zapisa i grafičkog prikaza pojmova i njihovih veza te primjene u konkretnim zadacima. Razvijati pozitivan odnos studenata prema učenju matematike, odgovornosti za svoj uspjeh i napredak te svijest o svojim matematičkim sposobnostima.

ZADACI NASTAVE: Upoznavanje i usvajanje pojmova i njihovih svojstava iz teorije skupova (skup, element skupa, Vennov dijagram, konačan i beskonačan skup, podskup, partitivni skup, univerzalni skup, operacije sa skupovima) te vještine operiranja sa skupovima. Razvijanje vještina argumentiranog komuniciranja matematičkim znanjima o skupovima.

KORELACIJA: Sadržaji iz matematičke logike, teorije brojeva, planimetrije i analitičke geometrije.

LITERATURA (za studente):

Osnovna:

1. Pavković, B., Veljan, D. (2004). *Elementarna matematika I*. Zagreb: Školska knjiga.
2. Baranović, N. (2014.) *Matematika I* (materijal dostupan na moodlu Filozofskog fakulteta: https://paideia.ffst.hr/learning/login/index.php
3. Udžbenici i zbirke zadataka za matematiku 1. razreda srednje škole: sadržaji vezani za skupove.

Dopunska:

1. Pelle, B. (2004). *Tako poučavamo matematiku*. Zagreb: Školske novine i HMD.

LITERATURA (za nastavnika):

1. Devidé, V. (1975*). Stara i nova matematika*. Školska knjiga: Zagreb
2. Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Element: Zagreb
3. Hrbacek K., Jech T. (1999). *Introduction to set theory*. Thrid Edition, Revised and Expanded. Marcel Dekker Inc.: New York
4. Kurepa, Đ. (1970). *Što su skupovi i kakva im je uloga*. Školska knjiga: Zagreb
5. Kurnik, Z. (2013). *Oblici matematičkog mišljenja*. Element: Zagreb
6. Pavković, B., Veljan, D. (2004). *Elementarna matematika I*. Zagreb: Školska knjiga.
7. Tourlakis, G. (2003). *Lectures In Logic And Set Theory. Volume II: Set Theory*. Cambridge University Press
8. Zsigmond, H., Mihály, S. (1976). *Pristup modernoj algebri*. Školska knjiga: Zagreb
9. Vuković, M. (2010). *Teorija skupova*. Predavanja. PMF–Matematički odjel, Zagreb

Osnovno o skupovima

Pojam *skup* se često koristi pri definiranju raznih pojmova: arhiv je *skup* starih dokumenata, knjiga je *skup* međusobno povezanih listova na kojima je napisan tekst, standard je *skup* uvjeta koje treba ispuniti, etika je *skup* moralnih načela koja vrijede u društvu itd. Taj pojam, kao i njegovi brojni sinonimi koriste se i u svakodnevnom govoru: na znanstvenom *skupu* su predstavljeni rezultati istraživanja *skupine* mladih istraživača, svaki filatelist ima svoju *zbirku* maraka, ove jeseni stiže nova *kolekcija* haljina, *set* posuda ima akcijsku cijenu, nebom leti *jato* ptica, jedna *grupa* studenata je bolja od druge itd. Bilo da se radi o pojmu *skup* ili njegovom sinonimu, iz konteksta je sasvim jasno njegovo značenje.

Osim što je uporaba pojma *skup* široko rasprostranjena, taj pojam je jedan od temeljnih pojmova i u matematici. S obzirom na jasnoću značenja, pojam ***skup*** se u teoriji skupova[1] prihvaća kao osnovni pojam te se ne definira. Intuitivno se može reći da je skup **cjelina nekih objekata,** a nas posebno zanimaju skupovi čiji objekti **imaju jedno ili više zajedničkih svojstava**. Važni skupovi kojima se bavimo u matematici su npr: **skupovi brojeva** $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C})$, **skupovi točaka** (dužina, polupravac, pravac, likovi, tijela), **skupovi funkcija** (realne funkcije, kompleksne funkcije, Booleove funkcije), itd.

Elementi skupa. Označavanje i prikazivanje.

Za svaki objekt koji pripada nekom skupu kažemo da je **element** ili član tog skupa, a za skup kažemo da sadrži taj objekt. Oznaka da neki objekt pripada skupu je $\in$ što čitamo „**je element**", a oznaka da neki objekt ne pripada skupu je $\notin$ što čitamo „**nije element**".

Skupove obično označavamo velikim tiskanim slovima: *A, B, C, ... X, Y, Z,* a njegove elemente malim pisanim slovima: *a, b, c … x, y, z*. Simbolička oznaka za skup su vitičaste zagrade $\{\ldots\}$. Općenito, ako je *A* skup, onda za svaki objekt *a* postoje točno dvije mogućnosti: $a \in A$ ili $a \notin A$.

Primjer 1. Promotrimo skupove *A* i *B*: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{\Delta,\text{O}\}$. Skup *A* sadrži brojeve 1, 2 i 3 te pišemo $1\in A, 2\in A, 3\in A$ ili kraće $1,2,3\in A$. Skup *A* ne sadrži npr. broj 7 te pišemo $7\notin A$. Elementi skupa *B* su Δ i O, ali npr. □ nije element tog skupa pa možemo pisati: $\Delta\in B, \text{O}\in B$, $\square\notin B$.
Elementi skupova mogu biti i skupovi. Tako skup $C=\{1,\{2,3\}\}$ sadrži broj 1 i skup $\{2,3\}$ te pišemo: $1\in C$, $\{2,3\}\in C$. U tom slučaju, brojevi 2 i 3 nisu elementi skupa *C*, već su oni elementi skupa kojeg skup *C* sadrži, tj. $2,3\notin C$.♦

Za skup koji nema elemenata kažemo da je **prazan skup**, što simbolički zapisujemo sa **Ø.** Još se može pisati $\varnothing=\{\ \}$**.** Na primjer, uzmimo da je *A* skup svih višekratnika broja 7, koji su veći od 30 i manji od 35. Kako između 30 i 35 nema niti jedan višekratnik broja 7, to znači da skup

[1] Utemeljitelj teorije skupova je njemački matematičar ruskog podrijetla, Georg Cantor (1845. – 1918.). Razvoj ove grane matematike doveo je do naglog razvoja cjelokupne matematike pa neki povezuju razvoj teorije skupova s početkom moderne matematike.

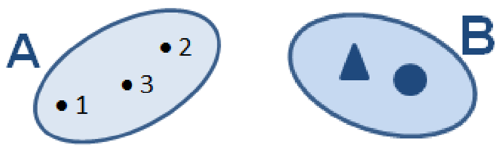
A nema niti jedan element, tj. on je prazan skup. No, to ne znači da skup A ne postoji; skup A postoji i on je prazan skup. Pišemo: $A=\varnothing$ ili $A=\{\ \}$.

Za svaki skup koji ima samo jedan element kažemo da je **jednočlan skup**, za one s dva elementa kažemo da su **dvočlani skupovi**, za one s tri elementa **tročlani** itd. Skup A iz prethodnog primjera je tročlani skup, a skupovi B i C su dvočlani skupovi. Općenito, skup može imati konačno ili beskonačno elemenata pa govorimo o **konačnim**, odnosno **beskonačnim skupovima**.

Primjer 2. Skup A koji sadrži sve dvoznamenkaste prirodne brojeve je konačan skup i pišemo: $A=\{10,11,\ldots,99\}$, gdje tri točkice zamjenjuju sve ostale elemente promatranog skupa. Skup B koji sadrži sve prirodne brojeve veće od 100 je beskonačan skup i pišemo: $B=\{101,102,103,\ldots\}$, gdje tri točkice na kraju zamjenjuju sve ostale elemente tog skupa. Inače, ako su tri točkice između navedenih elemenata, one zamjenjuju konačno mnogo elemenata, a ako su na kraju onda zamjenjuju beskonačno mnogo elemenata skupa. ♦

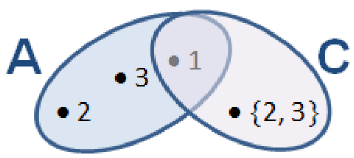
Kada ispisujemo elemente nekog skupa, **redoslijed nije bitan** i svi elementi skupa su po dogovoru međusobno različiti. Tako npr. ako želimo popisati imena svih studenata u nekoj grupi i ako više studenata ima isto ime, onda ćemo to ime navesti samo jednom.

Za grafički prikaz skupova koristimo se **Vennovim dijagramima** koji mogu biti u obliku kružnice, elipse, pravokutnika i sl., pri čemu se svaki element skupa može istaknuti točkom. Na primjer, skupovi $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{\Delta,\mathrm{O}\}$ se grafički mogu prikazati kao na slici 1.



Slika 1. Grafički prikaz skupova

Vennovim dijagramima se najčešće služimo kada na zoran način želimo prikazati odnose među pojedinim skupovima. Na primjer, broj 1 se nalazi i u skupu $A=\{1,2,3\}$ i u skupu $C=\{1,\{2,3\}\}$ što grafički prikazujemo kao na slici 2.



Slika 2. Grafički prikaz odnosa dvaju skupova

Za grafički prikaz odnosa između četiri ili više skupova prikladniji je dijagram pravokutnog oblika.

Zadavanje skupova. Jednakost skupova.

Za skup kažemo da je **zadan** (određen) kada se za svaki objekt može odrediti pripada li tom skupu ili ne. Skup se može zadavati navođenjem njegovih elemenata ili navođenjem zajedničkog svojstva svih elemenata tog skupa.

Primjer 3. Konačan skup koji se sastoji od brojeva 3, 4, 5 i 6 možemo zadati navođenjem elemenata: $A=\{3,4,5,6\}$ ili navođenjem zajedničkog svojstva tih elemenata: skup *A* sadrži *sve prirodne brojeve veće ili jednake* 3 *i manje od* 7. Simbolički to zapisujemo: $A=\{x\in\mathbb{N}:3\le x<7\}$ ili $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,3\le x<7\}$.

Beskonačan skup koji sadrži sve parne brojeve možemo navesti navođenjem prvih nekoliko elemenata $B=\{2,4,6,...\}$ ili navođenjem zajedničkog svojstva tih elemenata: skup *B* sadrži *sve parne prirodne brojeve* ili *sve prirodne brojeve koji su djeljivi s 2* ili *sve višekratnike broja 2*. Simbolički: $B=\{x\in\mathbb{N}:x=2k,\,k\in\mathbb{N}\}$.♦

Iz primjera 3 vidimo da se elementi nekog skupa mogu opisati na različite načine. Dakle, skupovi mogu biti jednaki i kada su njihovi elementi opisani na različite načine. Općenito, za skupove *A* i *B* kažemo da su **jednaki skupovi** ako se svaki elementi iz *A* nalazi i u *B* i obrnuto, ako se svaki element iz *B* nalazi i u *A* te pišemo $A=B$. U suprotnom pišemo $A\neq B$ i čitamo „*A* je različit od *B*“.

Primjer 4. Ako za skup *A* uzmemo skup svih prirodnih brojeva manjih od 10, a za skup *B* skup svih prirodnih jednoznamenkastih brojeva onda su oni jednaki jer se svaki element od *A* nalazi i u *B* i obrnuto:

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ \Rightarrow\ A=B.$$

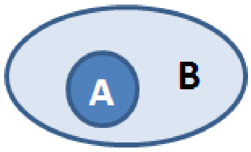
Ako uzmemo da je *C* skup svih cijelih jednoznamenkastih brojeva onda su skupovi *A* i *C* različiti jer u skupu *C* postoje elementi koji se ne nalaze u *A*.

$$A=\{1,2,...,8,9\},\ C=\{-9,-8,...,0,1,...,8,9\}\ \Rightarrow A\neq C.\blacklozenge$$

S obzirom da redoslijed navođenja elemenata skupa nije bitan, kada u nekom skupu promijenimo redoslijed elemenata, tako navedeni skup jednak je polaznom skupu. Na primjer: $\{1,2\}=\{2,1\}$. Ako bi u primjeru 4. za skup *B* napisali $B=\{9,8,7,6,5,4,3,2,1\}$ on je i dalje jednak skupu *A*.

Podskup. Partitivni skup.

Za skup *A* kažemo da je **podskup** skupa *B*, kada je svaki element skupa *A* ujedno i element skupa *B*. Simbolički to zapisujemo: $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$, odnosno: $A\subseteq B \iff (\forall x)(x\in A\Rightarrow x\in B)$. U tom slučaju kažemo da skup *B* sadrži skup *A*, odnosno da je *B* **nadskup** skupa *A* te zapisujemo: $B\supseteq A$ (Slika 3).



Slika 3. Grafički prikaz podskupa i nadskupa

To nadalje znači da je svaki skup podskup samog sebe: $A \subseteq A$. Posebno, prazan skup $\varnothing$ je podskup svakog skupa $\varnothing \subseteq A$, ali i sebe samoga: $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Ako za dva skupa *A* i *B* vrijedi: $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, onda je svaki element skupa A ujedno i element skupa B. Simbolički:

$$(A \subseteq B \quad i \quad a \in A) \quad \Rightarrow \quad a \in B$$

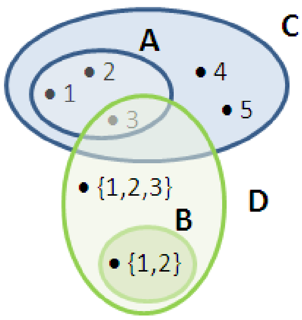
Ako za dva skupa *A* i *B* vrijedi: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ onda su ta **dva skupa jednaka**, tj. $A = B$. Vrijedi i obrnuto: Ako su dva skupa *A* i *B* jednaka, $A = B$, onda vrijedi: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Kraće pišemo:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ i } B \subseteq A$$

Ako je *A* podskup skupa *B*, a skupovi *A* i *B* nisu jednaki, onda kažemo da je *A* **pravi podskup** od *B* i pišemo $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Ako u skupu *A* postoji barem jedan element koji nije u *B*, kažemo da *A* **nije podskup** od *B* i pišemo $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$. Primijetimo da nijedan skup ne može biti pravi podskup sama sebe, tj. $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{A}$.

Primjer 5. Neka su dani skupovi: $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$, $\mathrm{B} = \{\{1,2\}\}$, $\mathrm{C} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{D} = \{\{1,2\},3,\{1,2,3\}\}$. Ispitajmo jesu li skupovi *A* i *B* podskupovi skupova *C* i *D*.

Zadani skupovi i odnosi među njima grafički se mogu prikazati kao na slici 4.



Slika 4. Grafički prikaz odnosa među skupovima

Kako je svaki element skupa *A* ujedno i element skupa *C*, zaključujemo da je *A* podskup od *C*. Budući *A* i *C* nisu jednaki skupovi, *A* je pravi podskup od *C*, pa možemo pisati: $A \subset C$. Međutim, *A* nije podskup skupa *D*, tj. $A \not\subset D$, jer *A* sadrži elemente koji nisu elementi od *D*, tj. $1,2 \in A$, ali $1,2 \notin D$. Nadalje, skup *B* je jednočlan skup čiji je element skup $\{1, 2\}$. Taj element se ne nalazi u skupu *C* pa *B* nije podskup od *C*, tj. $B \not\subset C$. Kako *D* sadrži element $\{1, 2\}$, skup *B* je podskup od *D* i to pravi podskup, $B \subset D$.♦

Vezu između relacije „biti element“ i „biti podskup“ opisat ćemo u sljedećem primjeru:

Primjer 6. Neka je dan tročlani skup $A=\{1,2,3\}$. Njegovi elementi su brojevi 1, 2 i 3. Pomoću tih elemenata mogu se formirati novi skupovi i to: jednočlani skupovi $\{1\},\{2\},\{3\}$ i dvočlani skupovi: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$. Svi ti skupovi su pravi podskupovi skupa *A*. Kako su prazan skup i sam skup *A* također podskupovi skupa *A*, svi podskupovi skupa *A* su: $\emptyset$, $\{1\},\{2\},\{3\}$, $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ i *A*.

Sada sve te skupove, tj. sve podskupove skupa *A*, sakupimo u jednu novu cjelinu, u jedan novi skup. Na taj način, podskupovi skupa *A* postaju elementi novog skupa kojeg označavamo sa $P(A)$ i nazivamo partitivnim skupom skupa *A*. Zapisujemo:

$$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}. \blacklozenge$$

Dakle, **partitivni skup skupa *A*** jest skup $P(A)$ koji se sastoji od svih podskupova skupa *A*. Simbolički: $P(A)=\{X : X\subseteq A\}$. Drugim riječima, podskupovi od *A* su elementi od $P(A)$. Vrijedi i obrnuto: elementi od $P(A)$ su podskupovi od *A*. Stoga vrijedi:

$$X\subseteq A \quad\Leftrightarrow\quad X\in P(A)$$

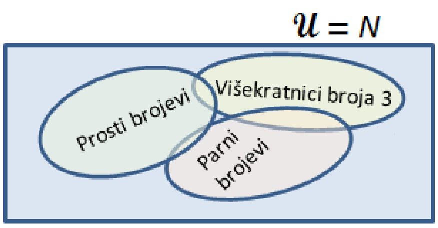
Kako su prazan skup i skup *A* uvijek podskupovi skupa *A*, to su oni uvijek elementi partitivnog skupa $P(A)$:

$$\emptyset\subseteq A \quad\Rightarrow\quad \emptyset\in P(A)$$
$$A\subseteq A \quad\Rightarrow\quad A\in P(A)$$

Uočimo da je u primjeru 5 skup *A* imao 3 elementa, a njegov partitivni skup $P(A)$ je imao 8 elemenata, što je 2^3 elemenata. Može se dokazati da vrijedi: Ako skup *A* ima *k* elemenata, onda partitivni skup $P(A)$ ima 2^k elemenata.

Operacije sa skupovima

U radu sa skupovima često nam treba skup koji sadrži sve elemente promatranih skupova, tj. skup koji je nadskup svih promatranih skupova. Takav skup nazivamo osnovnim ili **univerzalnim skupom** U, a grafički ga najčešće prikazujemo u obliku pravokutnika. Na primjer, kada promatramo različite podskupove skupa prirodnih brojeva, univerzalni skup može biti upravo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ (slika 10).

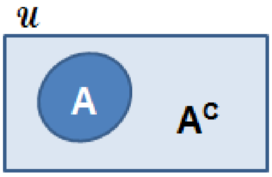


Slika 10. Univerzalni skup

Analogno logičkim operacijama sa sudovima, mogu se vršiti i operacije sa skupovima. Unarna operacija je komplement skupa (odgovara negaciji suda), a binarne operacije su unija skupova (odgovara disjunkciji sudova), presjek skupova (odgovara konjunkciji sudova), razlika i simetrična razlika skupova.

Komplement skupa

Neka je zadan skup *A* i univerzalni skup U, koji sadrži skup *A*. **Komplement skupa *A*** je skup svih onih elemenata univerzalnog skupa koji nisu u *A*. Za komplement skupa *A* koristit ćemo oznaku A^C (slika 11). Simbolički: $A^C = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$.



Slika 11. Komplement skupa

Primjer 7. Ako je *A* skup svih parnih brojeva, a univerzalni skup - skup svih prirodnih brojeva, $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, onda je komplement skupa *A* skup svih neparnih brojeva. Simbolički:

$$\left(A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k, k \in \mathbb{N}\} \quad i \quad \mathcal{U} = \mathbb{N}\right) \Rightarrow A^C = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k-1, k \in \mathbb{N}\}. \blacklozenge$$

Važno je uočiti da se komplement jednog skupa u odnosu na drugi skup može vršiti samo kada je polazni skup podskup drugog skupa. U tom slučaju može se koristiti druga simbolička oznaka. Npr. ako određujemo komplement skupa *A* u odnosu na skup *B*, može se pisati: $C_B(A)$.

Primjer 8. Odrediti komplemente: $C_B(A), C_C(A), C_C(B)$, ako su skupovi *A*, *B* i *C* zadani sa: $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \le 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 7\}$.

Skup *A* je skup svih pozitivnih realnih brojeva koji su manji ili jednaki 5, skup *B* je skup svih pozitivnih realnih brojeva koji su manji od 7, a skup C je skup svih realnih brojeva koji su veći ili jednaki -4 i manji ili jednaki 7. Zaključujemo da vrijedi: $A \subset B, A \subset C, B \subset C$ pa traženi komplementi postoje.

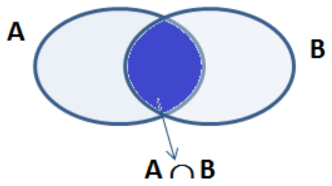
Komplement skupa *A* u odnosu na skup *B* je skup $C_B(A) = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x < 7\}$. Komplement skupa *A* u odnosu na skup *C* je skup $C_C(A) = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 0 \text{ ili } 5 < x \le 7\}$. Komplement skupa *B* u odnosu na skup *C* je skup $C_C(B) = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 0 \text{ ili } x = 7\}$. ♦

Za operaciju komplementa skupa vrijede sljedeća **svojstva**:

1. Komplement komplementa skupa je sam taj skup (Slika 11): $\left(A^C\right)^C = A$.
2. Komplement skupa s obzirom na samog sebe je prazan skup, a komplement praznog skupa s obzirom na neki skup jest taj skup: $C_A(A) = \varnothing, \quad C_A(\varnothing) = A$.
3. Skupovi su jednaki ako i samo ako su njihovi komplementi jednaki: $A = B \Leftrightarrow A^C = B^C$.

Presjek skupova

Presjek skupova *A* i *B* je skup koji sadrži sve one elemente koji se nalaze u oba skupa. Oznaka je $\cap$, a zapis $A\cap B$ čitamo „*A* presjek *B*“. Za elemente presjeka skupova *A* i *B* kaže se još da su *zajednički* elementi tih skupova (slika 12). Simbolički: $A\cap B=\{x\in \mathcal{U}: x\in A \; i \; x\in B\}$.



Slika 12. Presjek dvaju skupova

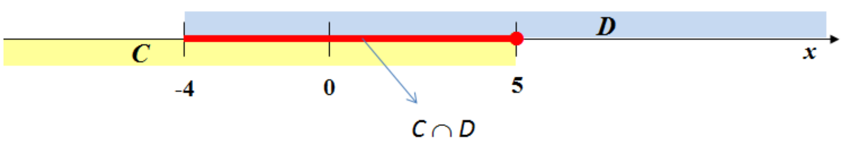
Za skupove čiji je presjek prazan skup kažemo da su **disjunktni skupovi**. Za disjunktne skupove se još kaže da nemaju *zajedničkih* elemenata (slika 13).

Slika 13. Disjunktni skupovi

Primjer 9. Odredimo presjek zadanih skupova:

(a) *A* je skup svih djelitelja broja 12, *B* je skup svih djelitelja broja 18;
(b) $C=\{x\in\mathbb{R}: x\le 5\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}: x>-4\}$;
(c) *E* je skup svih parnih brojeva, *F* je skup svih neparnih brojeva;
(d) *T* je trokut ABC, *p* je pravac (u ravnini).

(a) Djelitelji broja 12 su 1, 2, 3, 4, 6 i 12, tj. $A=\{1,2,3,4,6,12\}$. Djelitelji broja 18 su 1, 2, 3, 6, 9 i 18, tj. $B=\{1,2,3,6,9,18\}$. Presjek skupova *A* i *B* je skup čiji elementi su svi oni brojevi koji su djelitelji i broja 12 i broja 18, tj. zajednički djelitelji brojeva 12 i 18. To su brojevi 1, 2, 3 i 6. Dakle, $A\cap B=\{1,2,3,6\}$.
(b) Skup *C* čine svi realni brojevi koji su manji ili jednaki 5. Skup *D* čine svi realni brojevi koji su veći od -4. Presjek skupova *C* i *D* je skup čiji elementi su svi realni brojevi koji su veći od -4 i manji ili jednaki 5 (slika 14), tj. $C\cap D=\{x\in\mathbb{R}: -4<x\le 5\}$.

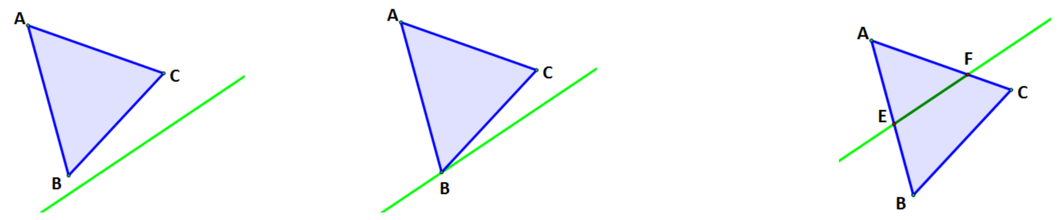


Slika 14. Presjek skupova *C* i *D*

(c) *E* i *F* su disjunktni skupovi, tj. $E\cap F=\varnothing$.

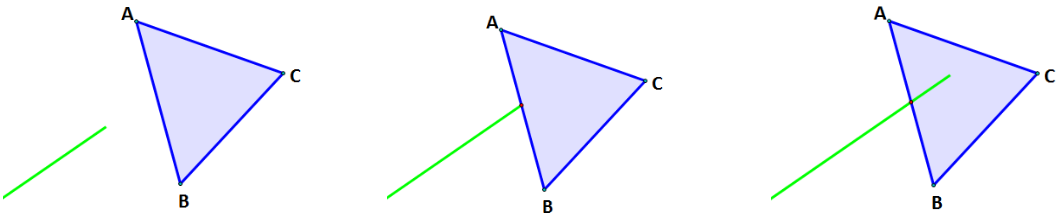
(d) Trokut i pravac su skupovi točaka pa je njihov presjek određeni skup točaka. Moguće je više različitih situacija: mogu biti disjunktni, mogu se sjeći u jednoj točki, a njihov presjek može biti i dužina (slika 15).

$T \cap p = \emptyset$ $\qquad$ $T \cap p = \{B\}$ $\qquad$ $T \cap p = \overline{EF}$



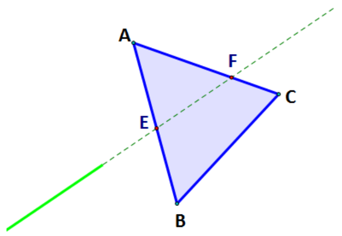
Slika 15. Presjek trokuta i pravca 1

Primijetimo da je na slici 16 prikazan također treći slučaj, kada je presjek trokuta T i pravca p dužina.



Slika 16. Presjek trokuta i pravca 2

Naime, pravac je neomeđen, a kada ga vizualno prikazujemo, crtamo samo jedan njegov dio. No, možemo zamisliti njegov daljnji tok (isprekidana linija na slici 17).



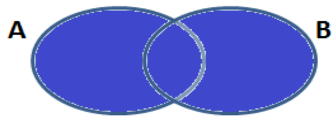
Slika 17. Presjek trokuta i pravca 3

Za operaciju presjeka skupova vrijede sljedeća **svojstva**:

1. Presjek skupova je komutativna operacija: $A \cap B = B \cap A$.
2. Presjek skupova je asocijativna operacija: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Presjek nekog skupa sa samim sobom je taj skup (svojstvo idempotentnosti): $A \cap A = A$.
4. Presjek nekog skupa sa praznim skupom je prazan skup: $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. Presjek nekog skupa i njegovog komplementa je prazan skup, tj. skup i njegov komplement su disjunktni skupovi: $A \cap A^C = \emptyset$.

Unija skupova

Unija skupova *A* i *B* je skup koji sadrži sve one elemente koji se nalaze u barem jednom od zadanih skupova. Oznaka je $\cup$, a zapis $A \cup B$ čitamo „*A* unija *B*“ (slika 18). Kažemo da smo skupove *A* i *B* **udružili**. Simbolički to zapisujemo: $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ } ili \text{ } x \in B\}$.

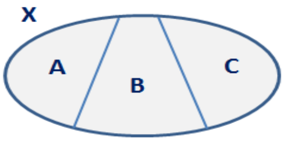


Slika 18. Unija skupova

Primjer 10. Ako za skup *A* uzmemo skup svih parnih prirodnih brojeva, a za skup *B* skup svih neparnih prirodnih brojeva, onda njihova unija daje skup svih prirodnih brojeva: $A \cup B = \mathbb{N}$.

Ako za *A* i *B* uzmemo skupove: $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 7\}$, onda je njihova unija skup $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 7\}$.♦

Ako neki skup podijelimo na neprazne podskupove, koji su međusobno disjunktni, a unija svih tih podskupova daje polazni skup kažemo da smo napravili particiju skupa. Na slici 19 neprazni podskupovi *A*, *B* i *C* čine particiju skupa *X*: podskupovi su međusobno disjunktni, a unija svih daje polazni skup *X*.



Slika 19. Particija skupa *X*

Općenito, **particija skupa *A*** je skup $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ koji ispunjava sljedeća svojstva:

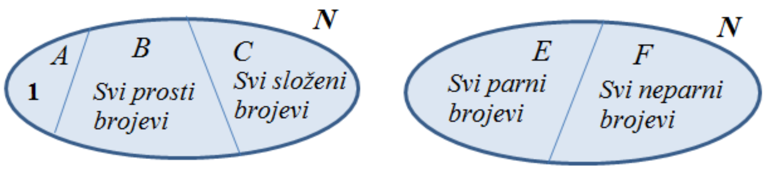
(1) Elementi skupa $\mathcal{F}(A)$ su neprazni podskupovi skupa *A*;

(2) Elementi skupa $\mathcal{F}(A)$ su međusobno (u parovima) disjunktni;

(3) Unija svih elemenata skupa $\mathcal{F}(A)$ je skup *A*.

Primjer 11. Particiju skupa svih prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ dobit ćemo ako za *A* uzmemo jednočlan skup $\{1\}$, za *B* skup svih prostih brojeva, a za *C* skup svih složenih brojeva. Skupovi *A*, *B* i *C* su neprazni i međusobno disjunktni: $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, a njihova unija daje skup svih prirodnih brojeva: $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$. Dakle, jedna particija skupa $\mathbb{N}$ je skup $\mathcal{F}_1(\mathbb{N}) = \{A, B, C\}$ (slika 20, lijevo).

Particiju skupa svih prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ imat ćemo i ako za *E* uzmemo skup svih parnih brojeva, a za *F* skup svih neparnih brojeva jer su tako odabrani skupovi *E* i *F* neprazni i međusobno disjunktni: $E \cap F = \emptyset$, a njihova unija daje polazni skup: $E \cup F = \mathbb{N}$. Dakle, druga particija skupa $\mathbb{N}$ je skup $\mathcal{F}_2(\mathbb{N}) = \{E, F\}$ (slika 20, desno).



Slika 20. Različite particije skupa $\mathbb{N}$

Iz ovog primjera se vidi da jedan skup može imati više različitih particija, pod uvjetom da taj skup nije prazan ili jednočlan. ♦

Za operaciju unije skupova vrijede sljedeća **svojstva**:

1. Unija skupova je komutativna operacija: $A \cup B = B \cup A$.
2. Unija skupova je asocijativna operacija: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. Unija nekog skupa sa samim sobom je taj skup (svojstvo idempotentnosti): $A \cup A = A$.
4. Unija nekog skupa sa praznim skupom je polazni skup: $A \cup \varnothing = A$.
5. Unija nekog skupa i njegovog komplementa je odgovarajući univerzalni skup: $A \cup A^C = \mathcal{U}$.
6. Unija je distributivna s obzirom na presjek: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. Presjek je distributivan s obzirom na uniju: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Zbog asocijativnosti operacije unije i presjeka umjesto $A \cup (B \cup C)$ i $(A \cup B) \cup C$ može se pisati $A \cup B \cup C$ te analogno, umjesto $A \cap (B \cap C)$ i $(A \cap B) \cap C$ može se pisati $A \cap B \cap C$. Tada govorimo o uniji, odnosno presjeku triju skupova. Općenito, može se definirati unija i presjek od n skupova (konačno ili beskonačno). **Unija od *n* skupova** $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$, je skup $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ ili kraće $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ koji sadrži sve one elemente koji se nalaze u barem jednom od zadanih skupova. **Presjek od *n* skupova** $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$, je skup $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ ili kraće $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ koji sadrži sve one elemente koji se nalaze u svakom od zadanih skupova.

Skupovne jednakosti dokazujemo koristeći već opisanu činjenicu: skupovi *X* i *Y* su jednaki ako i samo ako je *X* podskup od *Y* i *Y* podskup od *X*, tj. $(X \subseteq Y \quad \text{i} \quad Y \subseteq X) \Leftrightarrow X = Y$.

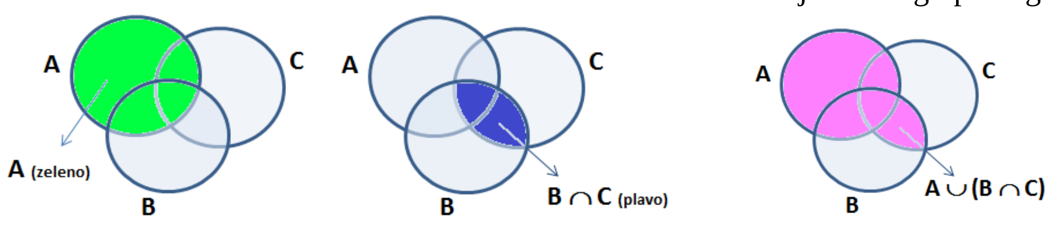
Primjer 12. Dokažimo svojstvo 6. Lijevu stranu jednakosti označimo sa *X*, a desnu sa *Y*. Neka je $x \in X$, tj. $x \in A \cup (B \cap C)$. Prema definiciji unije dvaju skupova, to znači da je $x \in A$ ili $x \in (B \cap C)$. Prema definiciji presjeka, imamo: $x \in A$ ili $(x \in B \text{ i } x \in C)$. Nadalje, ako je $x \in A$ onda je sigurno $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$. Ako je $x \in B$ i $x \in C$, onda je također $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$. Dalje, prema definiciji presjeka imamo: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, a to znači da je $x \in Y$. Zaključujemo, $X \subseteq Y$. Drugi smjer, da je $Y \subseteq X$, dokazujemo analogno. Prema tome, vrijedi $X = Y$, odnosno: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dokaz se može skratiti tako da se umjesto implikacija u oba smjera primijeni ekvivalencija, za koju se u svakom koraku može provjeriti da je istinita:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \text{ ili } x \in (B \cap C) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ ili } (x \in B \text{ i } x \in C) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \text{ i } (x \in A \cup C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \ \blacklozenge
\end{aligned}
$$

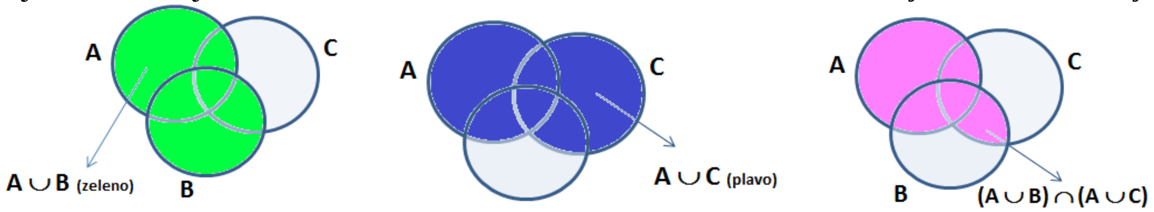
Skupovne jednakosti se mogu **ilustrirati** crtanjem Vennovih dijagrama. Ilustracija primjera 12 dana je na slici 21.

Unija zelenog i plavog:



Pojedinačne unije:

Presjek dobivenih unija:

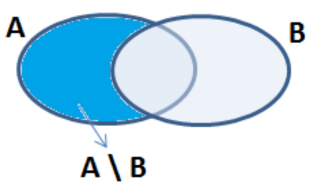


Slika 21. Skupovna jednakost

Sa dijagrama se vidi da je osjenčeni dio dobiven na temelju lijeve strane jednakosti jednak osjenčenom dijelu koji je dobiven na temelju desne strane jednakosti.

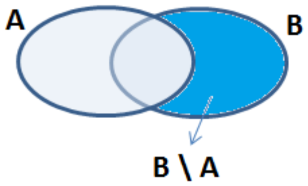
Razlika skupova

Razlika skupova A i B je skup koji se sastoji od svih elemenata skupa A koji nisu elementi skupa B. Oznaka je \, a zapis $A \setminus B$ čitamo „A razlika B" (slika 22). Kažemo da smo iz skupa A **uklonili** elemente koji pripadaju skupu B. Simbolički: $A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \ i \ x \notin B\}$.



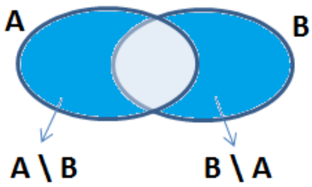
Slika 22. Skup A bez skupa B

Primijetimo da je skup $B \setminus A$ različit od skupa $A \setminus B$, jer $B \setminus A$ znači da smo iz skupa B uklonili elemente koji pripadaju skupu A (slika 23), tj. $B \setminus A = \{x \in \mathcal{U} : x \in B \ i \ x \notin A\}$. Drugim riječima, razlika skupova **nije komutativna operacija**, tj. $A \setminus B \neq B \setminus A$.



Slika 23. Skup *B* bez skupa *A*

Na temelju definicije razlike dvaju skupova može se zaključiti da su skupovi $A \setminus B$ i $B \setminus A$ **disjunktni skupovi** (slika 24), tj. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.



Slika 24. Razlika skupova *A* i *B*

Primjer 13. Za zadane skupove *A* i *B* odredite razlike: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

(a) $A = \{2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$

(b) *A* – skup svih prirodnih brojeva, *B* – skup svih parnih brojeva

(c) *A* – skup svih višekratnika broja 3, *B* – skup svih prirodnih brojeva djeljivih sa 6

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$.

(a) Kako je $A \subset B$, kada iz skupa *A* uklonimo sve elemente koji pripadaju skupu *B*, neće ostati niti jedan element, tj. $A \setminus B = \emptyset$. Druga razlika je: $B \setminus A = \{1,5\}$.

(b) $A \setminus B$ je skup svih neparnih brojeva, a $B \setminus A = \emptyset$ jer je $B \subset A$.

(c) Elementi zadanih skupova su: $A = \{3,6,9,12,15,18...\}$, $B = \{6,12,18,24...\}$ pa imamo: $A \setminus B = \{3,9,15,21,...\}$, tj. svi neparni višekratnici broja 3. $B \setminus A = \emptyset$ jer je $B \subset A$.

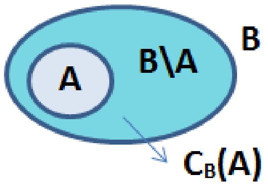
(d) Skup *A* je skup svih negativnih realnih brojeva, a skup *B* skup svih realnih brojeva većih ili jednakih -1, te ni jedan od njih nije podskup drugoga. Tražene razlike su skupovi: $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$, $B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.♦

Pored opisanih svojstava, za operaciju razlike skupova vrijede i sljedeća **svojstva**:

1. Razlika jednakih skupova je prazan skup: $A \setminus A = \emptyset$.
2. Razlika nekog skupa i praznog skupa: $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
3. Razlika skupova nije asocijativna operacija: $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

Neke **veze među operacijama** unije, presjeka ili komplementa:

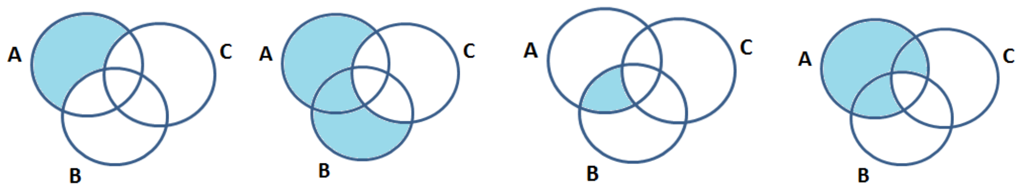
1. Za skupovne operacije vrijede **de Morganovi zakoni** (identiteti):
   (a) Komplement unije jednak je presjeku komplemenata: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.
   (b) Komplement presjeka jednak je uniji komplemenata: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
   (c) Komplement skupa *A* u odnosu na skup *B*, koji ga sadrži, jednak je razlici $B \setminus A$, tj. $A \subseteq B \Rightarrow C_B(A) = B \setminus A$ (slika 25).



Slika 25. Komplement i razlika skupova

2. Još neke jednakosti:
   (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
   (b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
   (c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
   (d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   (e) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

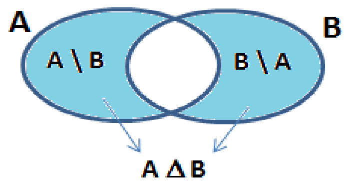
Dokaz navedenih jednakosti se provodi primjenom definicija pojedinih operacija, kako je pokazano u primjeru 12, a grafičkim prikazom pomoću Vennovih dijagrama mogu se uočiti ishodi tih operacija (slika 26, s lijeva: prva za (a) i (d), druga za (b), treća za (c), četvrta za (e)).



Slika 26. Ishodi skupovnih jednakosti

Simetrična razlika

Simetrična razlika skupova *A* i *B* je skup svih onih elemenata koji su elementi skupa $A \setminus B$ ili $B \setminus A$. Oznaka je Δ, a zapis $A \Delta B$ čitamo „A simetrična razlika B" (slika 27). Simbolički: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Značenje veznika ili je ekskluzivno.

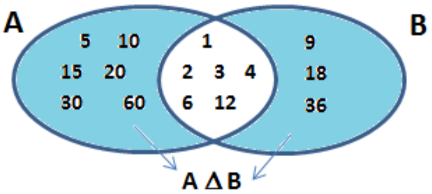


Slika 27. Simetrična razlika

Drugim riječima, simetrična razlika skupova *A* i *B* je skup svih onih elemenata koji su elementi skupa $A \cup B$, a nisu elementi skupa $A \cap B$. Simbolički: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Primjer 14. Odrediti simetričnu razliku skupova *A* i *B*, ako je *A* skup svih djelitelja broja 60, a *B* skup svih djelitelja broja 36.

Elementi skupova A i B su: $A = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$, $B = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. Razlike skupova su: $A \setminus B = \{5,10,15,20,30,60\}$, $B \setminus A = \{9,18,36\}$. Simetrična razlika je unija tih dvaju skupova $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, tj. skup: $A \Delta B = \{5,9,10,15,18,20,30,36,60\}$ (slika 28).



Slika 28. Simetrična razlika zadanih skupova

Ili, možemo odrediti uniju i presjek zadanih skupova te se simetrična razlika dobije kao razlika tih skupova: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,20,30,36,60\}$, $A \cap B = \{1,2,3,4,6,12\}$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, tj. $A \Delta B = \{5,9,10,15,18,20,30,36,60\}$ (slika 28). ♦

Uređeni par. Kartezijev produkt. Relacije.

Vidjeli smo da pri navođenju elemenata nekog skupa nije bitan njihov redoslijed. Međutim, u nekim situacijama je važno znati što je prvi element, što je drugi element itd. Ako uzmemo dva elementa nekog skupa te za jednog kažemo da je prvi, a za drugog da je drugi onda govorimo o **uređenom paru** ili **uređenoj dvojci**.

Općenito, **uređeni par elemenata *a* i *b*** zapisujemo (a,b) te kažemo da je ***a* prvi član**, a ***b* drugi član** uređenog para (a,b). Tako imamo par rukavica (lijeva, desna), par cipela (lijeva, desna), par brojeva na kino ulaznicama (broj reda, broj sjedala). No, kako nije isto npr. sjediti u 3. redu na 7. sjedalu ili u 7. redu na 3. sjedalu možemo pisati $(3,7) \neq (7,3)$. Općenito, ako članovi uređenog para zamijene svoja mjesta, dobiveni uređeni par se razlikuje od polaznog para (osim u slučaju kada su članovi uređenog para međusobno jednaki). Dakle, ako je $a \neq b$ onda vrijedi: $(a,b) \neq (b,a)$.

Za dva uređena para (a,b) i (c,d) kažemo da su **jednaka** kada su im prvi članovi i drugi članovi međusobno jednaki, tj. kada je $a = c$ i $b = d$.

Primjer 15. Odredite nepoznanice *x* i *y* tako da uređeni parovi brojeva $(2x-1,3)$ i $(5,7-y)$ budu jednaki.

Kada izjednačimo prve članove, dobivamo linearnu jednadžbu $2x-1=5$ iz koje se dobiva vrijednost nepoznanice $x=3$. Izjednačavanjem drugih članova dobiva se linearna jednadžba $3=7-y$ pa je vrijednost nepoznanice $y=4$. Dakle, ako za nepoznanice x i y uzmemo $x=3$ i $y=4$, uređeni parovi brojeva su $(5,3)$.♦

Analogno se definira **uređena trojka** (a,b,c) elemenata a, b i c nekog skupa, pri čemu je a prvi član, b drugi član, a c treći član uređene trojke (a,b,c). Općenito, $(a_1,a_2,...,a_n)$ je **uređena *n*-torka** elemenata $a_1,a_2,...,a_n$, pri čemu je a_1 prvi član, a_2 drugi član itd. uređene *n*-torke $(a_1,a_2,...,a_n)$.

Kartezijev produkt

Kartezijev (ili direktni) produkt dvaju skupova *A* i *B* je skup koji se sastoji od svih uređenih parova, kojima je prvi član iz skupa *A*, a drugi član iz skupa *B*. Oznaka je $A\times B$, što čitamo „A *puta* B“ ili „A *Kartezijevo* B“. Simbolički: $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$.

Primjer 16. Neka je *A* dvočlani skup $A=\{x,y\}$, a *B* tročlani skup $B=\{1,2,3\}$. Ako su elementi skupa *A* prvi članovi, a elementi skupa *B* drugi članovi uređenih parova, onda možemo formirati sljedeće uređene parove:

$$\begin{matrix}(x,1) & (x,2) & (x,3)\\ (y,1) & (y,2) & (y,3)\end{matrix}.$$

Kartezijev produkt skupova *A* i *B* je skup $A\times B$ čiji su elementi svi navedeni uređeni parovi, tj.

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}.$$

Ako su elementi skupa *B* prvi članovi, a elementi skupa *A* drugi članovi uređenih parova, onda imamo Kartezijev produkt $B\times A$, tj:

$$B\times A=\{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$$

na temelju čega se može zaključiti da Kartezijev produkt dvaju skupova **nije komutativna operacija**, tj. $A\times B\neq B\times A$.♦

Primijetimo da je u primjeru 16 skup *A* imao 2 elementa, skup *B* je imao 3 elementa, a Kartezijevi produkti $A\times B$ i $B\times A$ po 6 elemenata što je $2\cdot 3$ odnosno $3\cdot 2$. Općenito, ako skup *A* ima ***p*** elemenata, a skup *B* ima ***q*** elemenata, onda će skupovi $A\times B$ i $B\times A$ imati $p\cdot q$, odnosno $q\cdot p$ elemenata.

Kartezijev produkt triju skupova *A*, *B* i *C* je skup koji se sastoji od svih **uređenih trojki** (a,b,c), kojima je prvi član *a* iz skupa *A*, drugi član *b* iz skupa *B* i treći član *c* iz skupa *C*. Simbolički: $A\times B\times C=\{(a,b,c): a\in A, b\in B, c\in C\}$.

Slično se definira **Kartezijev produkt od *n* skupova** $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$, kao skup svih uređenih *n*-torki $(a_1, a_2, ..., a_n)$, kojima je prvi član a_1 iz prvog skupa A_1, drugi član a_2 iz drugog skupa A_2, itd. Simbolički:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}$$

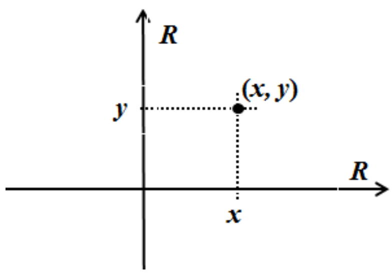
Ako su skupovi pri tome jednaki, onda imamo Kartezijev produkt skupa sa samim sobom:

$$A^2 = A \times A = \{(a,b) : a, b \in A\}$$
$$A^3 = A \times A \times A = \{(a,b,c) : a, b, c \in A\}$$
$$\ldots$$
$$A^n = A \times A \times ... \times A = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A, i = 1, ..., n\}$$

Skup $A^2 = A \times A$ se još naziva i **Kartezijev kvadrat**.

Primjer 17. Ako za skup *A* uzmemo skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, onda je Kartezijev kvadrat skupa $\mathbb{R}$ skup svih uređenih parova realnih brojeva: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.♦

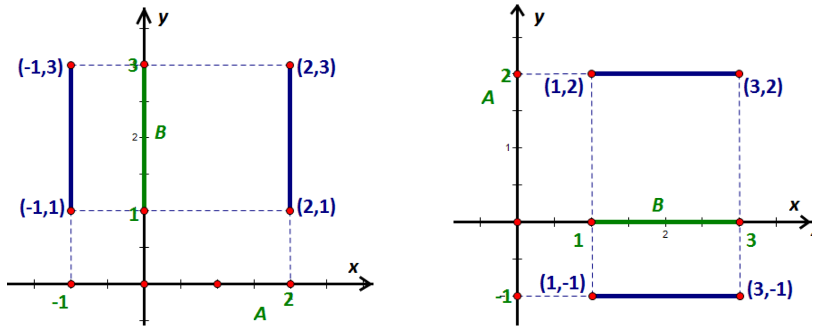
Ako gradimo Kartezijev produkt skupova koji su podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, onda se on grafički može prikazati u pravokutnom (Kartezijevom) koordinatnom sustavu u ravnini, pri čemu elemente prvog skupa prikazujemo na *x*-osi, a elemente drugog skupa na *y*-osi. Svakom uređenom paru realnih brojeva (x, y) pridružuje se samo jedna točka koordinatne ravnine i obrnuto. Zbog toga se često $\mathbb{R}^2$ poistovjećuje s koordinatnom ravninom (slika 29).



Slika 29. Kartezijev produkt $\mathbb{R}^2$ u ravnini

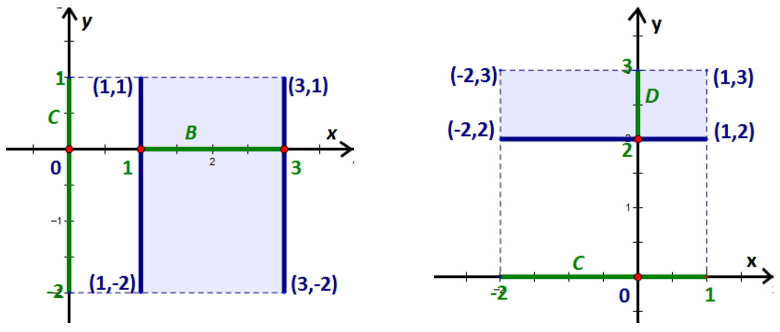
Primjer 18. Zadani su skupovi $A = \{-1, 2\}$, $B = \{b \in \mathbb{R} : 1 \le b \le 3\}$, $C = \{c \in \mathbb{R} : -2 < c < 1\}$ i $D = \{d \in \mathbb{R} : 2 \le d < 3\}$. Odredite i grafički prikažite u Kartezijevom koordinatnom sustavu skupove: $A \times B, B \times A,$ $B \times C$ i $C \times D$.

Skup *A* je dvočlan skup dok su skupovi *B*, *C* i *D* beskonačni skupovi. Kartezijev produkt skupova *A* i *B* su skupovi: $A \times B = \{(-1, b), (2, b) : 1 \le b \le 3\}$ i $B \times A = \{(b, -1), (b, 2) : 1 \le b \le 3\}$ koji sadrže beskonačno mnogo uređenih parova, a koji u koordinatnom sustavu u ravnini određuju sve točke dviju dužina. Pri tome podskup $\{(-1, b) : 1 \le b \le 3\} \subset A \times B$ određuje točke jedne dužine, a podskup $\{(2, b) : 1 \le b \le 3\} \subset A \times B$ određuje točke druge dužine i one su paralelne sa y-osi (slika 30, lijevo). Nadalje, podskup $\{(b,-1):1\le b\le 3\}\subset B\times A$ određuje točke jedne dužine, a podskup $\{(b,2):1\le b\le 3\}\subset B\times A$ određuje točke druge dužine koje su paralelne sa x-osi (slika 30, desno).



Slika 30. Kartezijev produkt skupova A i B

Kartezijev produkt skupova B i C je skup koji sadrži beskonačno mnogo uređenih parova: $B\times C=\{(b,c):1\le b\le 3,-2<c<1\}$ koji u koordinatnom sustavu u ravnini određuju sve točke pravokutnika, bez točaka dviju stranica (slika 31, lijevo). Kartezijev produkt skupova C i D je skup koji također sadrži beskonačno mnogo uređenih parova: $C\times D=\{(c,d):-2<c<1,2\le d<3\}$ koji u koordinatnom sustavu u ravnini određuju sve točke pravokutnika, bez točaka triju stranica (slika 31, desno).



Slika 31. Kartezijev produkt skupova $B\times C$ i $C\times D$

Općenito, pri crtanju u koordinatnom sustavu, rub koji je uključen ističemo punom točkom ili linijom, a rub koji nije uključen ističemo isprekidanom linijom ili (praznim) kružićem (ili bez točke).♦

Za Kartezijev produkt skupova vrijede sljedeća **svojstva**:

1. Ako je barem jedan od skupova prazan skup, Kartezijev produkt tih skupova je prazan skup: $A\times\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\times B=\varnothing$, $\varnothing\times\varnothing=\varnothing$.
2. Svojstvo distributivnosti s lijeva i s desna:

   (a) $C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times B)$

   (b) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

Relacije

U svakodnevnom životu postoje različiti odnosi (relacije, lat. *relatio* znači veza) među osobama ili predmetima. Tako se na primjer među osobama mogu promatrati rodbinske veze: *brat, sestra, otac* itd.; među predmetima mogu se promatrati odnosi: *ispod, iznad, ispred, iza* itd. Na sličan način mogu se promatrati odnosi između matematičkih objekata nekog skupa. Na primjer, kada uspoređujemo dva prirodna broja može se reći je li jedan broj *veći, manji* ili *jednak* drugom broju, je li *djeljiv* s nekim brojem; za likove u ravnini može se reći jesu li *slični* ili *sukladni* itd.

n-arna relacija ρ na skupa A je bilo koji podskup skupa $A^n, n=2,3,4,...$, tj. bilo koji skup uređenih parova ($n=2$) ili skup uređenih trojki ($n=3$), itd. Posebno, kada je $n=2$ govorimo o binarnoj relaciji na skupu A. **Binarnom relacijom ρ na skupovima A i B** naziva se bilo koji podskup Kartezijevog produkta $A\times B$. To znači da je binarna relacija bilo koji skup uređenih parova, $\rho\subseteq A\times B$, kojima je prvi član iz skupa *A*, a drugi član iz skupa *B*. Ako su dva elementa $a\in A$ i $b\in B$ u relaciji $\rho\subseteq A\times B$, onda pišemo: $(a,b)\in\rho$ ili $a\rho b$ te čitamo „**element *a* je u relaciji ρ sa elementom *b***“. U Kartezijevom produktu $A\times B$ obično određujemo onu binarnu relaciju za koju su elementi *a* i *b* uređenih parova $(a,b)\in A\times B$ vezani nekim pravilom (formulom).

Primjer 19. Neka su dani supovi $A=\{-1,1,2\}$ i $B=\{1,4\}$. Kartezijev produkt skupova *A* i *B* je skup: $A\times B=\{(-1,1),(-1,4),(1,1),(1,4),(2,1),(2,4)\}$. Relacija ρ definirana sa:
(a) $\rho=\{(x,y)\in A\times B: x<y\}$ je skup: $\rho=\{(-1,1),(-1,4),(1,4),(2,4)\}$
(b) $\rho=\{(x,y)\in A\times B: x>y\}$ je skup: $\rho=\{(2,1)\}$.
(c) $\rho=\{(x,y)\in A\times B: x=y\}$ je skup: $\rho=\{(1,1)\}$.
(d) $\rho=\{(x,y)\in A\times B: y=x^2\}$ je skup: $\rho=\{(-1,1),(1,1),(2,4)\}$.
(e) $\rho=\{(x,y)\in A\times B: x=y^2\}$ je skup: $\rho=\{(1,1)\}$, itd.♦

Na temelju primjera 19. vidimo da na Kartezijevom produktu $A\times B$ može biti definirano više različitih binarnih relacija. Kako se najčešće koristi binarna relacija, radi jednostavnosti češće se kaže samo *relacija* umjesto *binarna relacija*.

Relacije ekvivalencije

Za relaciju $\rho\subseteq A\times A$ kažemo da je **relacija ekvivalencije** (klasifikacije) ako ispunjava sljedeća tri svojstva:
(a) **Refleksivnost**: svaki element *a* iz skupa *A* je u relaciji sa samim sobom: $(a,a)\in\rho$;
(b) **Simetričnost**: ako je element *a* u relaciji s elementom *b*, onda je i *b* u relaciji sa *a*: $(a,b)\in\rho\Rightarrow(b,a)\in\rho$;
(c) **Tranzitivnost**: ako je element *a* u relaciji s elementom *b*, a *b* u relaciji s elementom *c*, onda je i *a* u relaciji sa *c*: $[(a,b)\in\rho \; i \; (b,c)\in\rho]\Rightarrow(a,c)\in\rho$.

Primjer 20. Na skupu $A=\{2,3,6,12,15\}$ promotrimo relaciju „biti djelitelj“, tj. $(\forall a,b\in A)(a,b)\in\rho \Leftrightarrow a\,|\,b$. Kartezijev kvadrat A^2 sadrži 25 uređenih parova. Od tih uređenih parova, elementi relacije „biti djelitelj“ su svi uređeni parovi u kojima je prvi član djelitelj drugog člana. Dakle, relacija je skup:

$$\rho=\{(2,2),(2,6),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12),(3,15),(6,6),(6,12),(12,12),(15,15)\}.$$

Relacija ρ je refleksivna jer je svaki element iz A u relaciji sa samim sobom (svaki broj je djeljiv sa samim sobom), tj. $\{(2,2),(3,3),(6,6),(12,12),(15,15)\}\subset\rho$. Relacija ρ nije simetrična jer je na primjer 2 djelitelj broja 6, ali 6 nije djelitelj broja 2, tj. $(2,6)\in\rho$, ali $(6,2)\notin\rho$. Kako svojstvo (b) nije ispunjeno, ova relacija nije relacija ekvivalencije.♦

Primjer 21. Uzmimo skup svih pravaca $P=\{a,b,c,d,...\}$ ravnine π te promotrimo relaciju „biti paralelan“, tj. $(\forall a,b\in P)(a,b)\in\rho\Leftrightarrow a\,\|\,b$.

Relacija je refleksivna jer je svaki pravac paralelan sa samim sobom, tj. $\{(a,a),(b,b),...\}\subset\rho$, odnosno $(\forall a\in P)(a,a)\in\rho\Leftrightarrow a\,\|\,a$. Relacija je simetrična jer ako je pravac *a* paralelan sa pravcem *b* onda je i *b* paralelan sa *a*, tj. $(\forall a,b\in P)(a,b)\in\rho\Rightarrow(b,a)\in\rho$ jer $a\,\|\,b\Rightarrow b\,\|\,a$. Relacija je tranzitivna jer ako je pravac *a* paralelan sa pravcem *b*, a pravac *b* paralelan sa pravcem *c*, onda je i *a* paralelan sa *c*, tj. $(\forall a,b,c\in P)\left[(a,b)\in\rho,(b,c)\in\rho\right]\Rightarrow(a,c)\in\rho$ jer vrijedi: $(a\,\|\,b,\,b\,\|\,c)\Rightarrow a\,\|\,c$. Budući promatrana relacija ispunjava sva tri svojstva, zaključujemo da je relacija „biti paralelan“ relacija ekvivalencije.♦

U daljnjem radu često će se koristiti operacije sa skupovima i različite vrste relacija.

Pitanja i zadaci za ponavljanje i vježbu

1. Objasniti pojmove: skup, element skupa, podskup, nadskup, partitivni skup, particija skupa.
2. Unarna operacija na skupovima. Primjer.
3. Binarne operacije na skupovima. Primjer.
4. Za koje operacije vrijedi svojstvo komutativnosti, za koje ne.
5. De Morganovi zakoni za skupove.
6. Uređeni par. Uređena *n*-torka.
7. Kartezijev produkt. Kartezijev produkt podskupova od $\mathbb{R}$ i grafički prikaz.
8. Relacija. Relacija ekvivalencije. Primjer.
9. Zadane skupove zapišite simbolički te odredite koliko elemenata ti skupovi imaju:

   A - Skup svih parnih brojeva djeljivih s 3,
   B - Skup svih neparnih brojeva većih od 5 i manjih ili jednakih 15,
   C - Skup svih djelitelja broja 20,
   D - Skup svih višekratnika broja 4, koji su manji od 40.

10. Presjek zadanih skupova (skupovi točaka u ravnini) prikažite grafički i zapišite simbolički:
   (a) dva trokuta,
   (b) dvije kružnice,
   (c) pravac i kružnica,
   (d) pravac i krug,
   (e) pravac i kut,
   (f) dvije koncentrične kružnice,
   (g) dva koncentrična kruga.

11. Zadani su skupovi brojeva: $A=\{1,2,3,4\}, B=\{-1,0,1,2\}, C=\{4,5\}$. Odredite skupove:
   (a) $A\cup B,\quad A\cap B,\quad A\setminus B,\quad B\setminus A;\ A\Delta B,\ A\Delta C,\ B\Delta C$
   (b) $B\setminus(A\cap C),\quad C\setminus(A\cap B);$
   (c) $P(C),\quad P(A)$.

12. Zadani su skupovi brojeva: $A=\{x\in\mathbb{Z}:x>3\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}:5\le x\le 8\}$ i $C=\{x\in\mathbb{N}:x=2k,k\in\mathbb{N}\}$. Odredite elemente tih skupova, a zatim odredite i grafički prikažite skupove:
   (a) $A\cup B,\quad A\cap B,\quad A\setminus B;$
   (b) $B\setminus(A\cap C),\quad C\setminus(A\cap B);$
   (c) $C_A(B),\quad C_B(A)$.

13. Vennovim dijagramom ilustrirajte ishode sljedećih skupovnih jednakosti:
   (a) $(A\cap B)\setminus B=\emptyset$,
   (b) $(A\cup B)\setminus(A\setminus B)=B$,
   (c) $(B\setminus A)\setminus B=\emptyset$,
   (d) $(B\setminus A)\setminus A=B\setminus A$,
   (e) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$,
   (f) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

14. Neka su *A*, *B* i *C* proizvoljni neprazni skupovi iz univerzalnog skupa **U**. Dokažite sljedeće skupovne jednakosti:
   (a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
   (b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
   (c) $(A\cup B)\cap A=(A\cap B)\cup A=A$,
   (d) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$,
   (e) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$,
   (f) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,
   (g) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.